وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

كرّاسة التمارين

الصفّ الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني

١٢

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني

كرّاسة التمارين

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٤٣ هـ

٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية ـ قطاع البحوث التربوية والمناهج

إدارة تطوير المناهج

الطبعة الأولى ٢٠١٤ م
الطبعة الثانية ٢٠١٦ م
٢٠١٨ م
٢٠١٩ م
٢٠٢٠ م
٢٠٢١ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر أدبي

أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمود عبد الغني محمد　　أ. سعيد أحمد علي خلف
أ. يسرى شملان أحمد البحر　　أ. عيدة خلف عواد الشمري

أ. هنادي حباس غنيم المجول

دار التَّربَويّون House of Education **ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤م**

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

مطبعة النظائر

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (١٦) بتاريخ ٢٠١٦/٤/١١م

حضرة صاحب السمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Nawaf AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
ولي عهد دولة الكويت
H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتويات

الوحدة الرابعة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

تَمَرَّنْ ٤-١ ..... ٨
تمارين إثرائيّة ٢٨
اختبار الوحدة الرابعة ٢٩

الوحدة الخامسة: المتباينات والبرمجة الخطية

تَمَرَّنْ ٥-١ ..... ٣٢
تَمَرَّنْ ٥-٢ ..... ٣٤
تمارين إثرائيّة ٣٦
اختبار الوحدة الخامسة ٣٧

تمرَّنْ
٤-١

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Discrete Random Variables and Probability Distributions

(٤-١-أ) المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

Discrete Random Variables

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

(أ) المتغير العشوائي سـ الذي يمثل عدد الكتابات.

(ب) المتغير العشوائي صـ الذي يمثل ربع عدد الكتابات.

(جـ) المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مضافًا له ١.

(د) المتغير العشوائي ك الذي يمثل ضعف عدد الكتابات.

(٢) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي سـ يعبر عن عدد الصور فأوجد:

(أ) فضاء العينة (ف).

(ب) مدى المتغير العشوائي سـ.

(جـ) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف) (د(س$_{ر}$)) = ل(سـ = س$_{ر}$).

(د) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

(٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,١	٠,٣	ك	٠,٢	٠,٣

فأوجد قيمة ك.

(٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {١، ٢، ٣، ٤} وكان د(١) = ٠,١ ، د(٣) = ٠,٤ ، د(٤) = ٠,٢.

فأوجد د(٢)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

(٥) صندوق يحوي ١٠ كرات متماثلة منها ٦ كرات حمراء و٤ كرات بيضاء سحبت ٥ كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س يمثل عدد الكرات البيضاء. فأوجد ما يلي:

(أ) عدد عناصر فضاء العينة (ن (ف)).

(ب) مدى المتغير العشوائي س.

(جـ) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

(٦) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س.

(٧) ٤ بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٤ وضعت في كيس، سحبت بطاقة عشوائيًّا فإذا كان س هو «الرقم المدون على البطاقة المسحوبة من الكيس» فأوجد:

(أ) فضاء العينة (ف).

(ب) مدى المتغير العشوائي س.

(جـ) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

(هـ) التوقع μ للمتغير العشوائي س.

(٨) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	٧	٨	٩	١٠
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

أوجد:

(أ) التوقع (μ).

(ب) التباين ($\sigma^{٢}$).

(جـ) الانحراف المعياري (σ).

(٩) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,١٥	٠,١	٠,٢٥	٠,٣

أوجد: ت(٠) ، ت(١) ، ت(٢) ، ت(٣) ، ت(٥ , ٣)، ت(٤) ، ت(٥) حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

(١٠) الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	-١	٣	٥	٧
ت(س)	٠,١	٠,٤٥	٠,٧	١

أوجد:

(أ) ل(-١ < سـ ≤ ٥).

(ب) ل(٣ < سـ ≤ ٧).

(جـ) ل (سـ > ٣).

(١١) لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٤	٠,٢	٠,١	٠,٣

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

(١٢) عند القاء قطعة نقود معدنية متماثلة مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوي ليكن سـ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة.

(أ) أوجد فضاء العينة (ف).

(ب) أوجد مدى المتغير العشوائي (سـ).

(جـ) أوجد احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف).

(د) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

(هـ) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

(و) أوجد دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي سـ.

(١٣) إذا كان س~ متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما ن = ١٠ ، ل = ٠,٥

فأوجد:

(أ) ل(س~ = صفر).

(ب) ل(٢ < س~ ≤ ٤).

(١٤) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ١٠ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور كتابة ٤ مرات.

(١٥) عند إلقاء حجر نرد منتظم ٧ مرات متتالية، أوجد:

(أ) احتمال ظهور العدد ٢ خمس مرات.

(ب) احتمال ظهور العدد ٢ مرة واحدة على الأقل.

(جـ) احتمال ظهور العدد ٢ مرة واحدة على الأكثر.

(١٦) ينتج مصنع ١٠٠ وحدة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة ٠,٠٣. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة.

(١٧) إذا رمينا قطعة نقود معدنية متماثلة ١٢ مرّة.

(أ) احسب احتمال الحصول على صورة ٧ مرّات.

(ب) أوجد التوقّع والتباين.

(١٨) في أحد مصانع الإطارات تبين أن ٥٪ من الإطارات غير صالحة للاستعمال. إذا سحبنا ١٠ إطارات، فأوجد التوقع والتباين للإطارات غير الصالحة.

(١٩) ينتج مصنع ألبان ٢٥٠٠ علبة يوميًّا فإذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة ٠,٠٥ أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد العلب الفاسدة في أحد الأيام.

(٢٠) نسبة الطلاب الذين يشاركون في المسابقات العلمية في إحدى المدارس ٢٠٪. إذا تمّ اختيار ١٥ طالبًا عشوائيًّا من طلاب المدرسة فأوجد احتمال أن يكون منهم ٥ طلاب يشاركون في المسابقات العلمية.

(٢١) رميت قطعة نقود متماثلة ١٦ مرة. أوجد كلًّا من:

التوقع، التباين، الانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الصورة.

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

(أ) المتغير العشوائي س~ الذي يمثل عدد الصور.

(ب) المتغير العشوائي ص~ الذي يمثل ثلاثة أمثال عدد الصور.

(جـ) المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه ١.

(٢) كيس به ثلاث بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣، سحبت عشوائيًّا بطاقتان الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع إذا كان المتغير العشوائي س~ هو «مجموع العددين على البطاقتين». فأوجد:

(أ) فضاء العينة (ف).

(ب) مدى المتغير العشوائي (س~).

(جـ) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف): (د(س ر)) = ل(س~ = س ر).

(د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي (س~).

(٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س~ هي:

س	−١	٠	١
د(س)	٠,٢	ك	٠,٤

فأوجد قيمة ك.

(٤) إذا كان س~ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {−١، ٢، ٣، ٤} وكان د(−١) = ١,٠، د(٢) = ٢,٠، د(٣) = ٤,٠

أوجد د(٤)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س~.

(٥) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س~ هي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

أوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س~.

(٦) صندوق يحوي ٨ كرات متماثلة منها ٦ كرات حمراء وكرتان بيضاء. سحبت عشوائيًّا ٣ كرات معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س~ يمثل عدد الكرات الحمراء. فأوجد ما يلي:

(أ) عدد عناصر فضاء العينة (ن).

(ب) مدى المتغير العشوائي س~.

(جـ) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س~.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س~.

(٧) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س~ هي:

س	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١	٠,٣

أوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س~.

(٨) ٤ بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام ٠، ٢، ٤، ٦ وضعت في كيس، سحبت بطاقة عشوائيًّا، إذا كان س~ هو «الرقم المدون على البطاقة المسحوبة من الكيس» فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي س~.

(٩) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د لمتغير عشوائي متقطع س~.

س	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$

فأوجد:

(أ) التوقع (μ).

(ب) التباين ($\sigma^{٢}$).

(جـ) الانحراف المعياري (σ).

(١٠) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س~.

س	-١	٠	١	٢
د(س)	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣

أوجد: ت(-١) ، ت(٠)، ت(٠,٥) ، ت(١) ، ت(١,٥)، حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س~.

(١١) الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	-٢	٠	٢	٤
ت(س)	٠,١٥	٠,٣٠	٠,٧٥	١

أوجد:

(أ) ل(-٢ < سـ ≤ ٢).

(ب) ل(٠ < سـ ≤ ٤).

(جـ) ل (سـ > ٠).

(١٢) لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

(١٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: ن = ٨ ، ل = ١ , ٠

فأوجد:

(أ) ل(سـ = صفر).

(ب) ل(١ < سـ ≤ ٤).

(١٤) عند القاء قطعة نقود معدنية متماثلة ثلاث مرات متتالية وملاحظة الوجه العلوي ليكن سـ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور كتابة.

(أ) أوجد فضاء العينة (ف).

(ب) أوجد مدى المتغير العشوائي (سـ).

(جـ) أوجد احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (ف).

(د) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

(هـ) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

(و) أوجد دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي سـ.

(١٥) عند إلقاء حجر نرد منتظم ٥ مرات متتالية، أوجد:

(أ) احتمال ظهور العدد ٤ ثلاث مرات.

(ب) احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأقل.

(جـ) احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأكثر.

(١٦) عند إلقاء قطعة نقود معدنية متماثلة ثلاث مرات متتالية. أوجد احتمال ظهور «صورتين فقط».

(١٧) أسرة تضم ستة أطفال، إذا كان احتمال أن يكون أي طفل ذكر هو ٠,٥.

فأوجد:

(أ) احتمال أن يكون بينهم ثلاثة ذكور فقط.

(ب) احتمال أن يكون عدد الذكور أقل من عدد الإناث.

(١٨) ينتج مصنع أجهزة حاسوب ٢٥٠ جهازًا يوميًّا. إذا كانت نسبة إنتاج الأجهزة المعيبة ٠,٠٢ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الأجهزة المعيبة في أحد الأيام.

(١٩) ينتج مصنع أجهزة تلفاز وكانت نسبة الأجهزة التي تحوي عيبًا في الإنتاج تساوي ٠,٠١. إذا تمّ عشوائيًّا سحب ١٥ وحدة من إنتاج المصنع، فأوجد التوقع والتباين للأجهزة الصالحة للاستعمال.

تمارين موضوعية

في التمارين (١-١١)، عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (أ) (ب)

(٢) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (أ) (ب)

(٣) دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة ﻫ هي احتمال وقوع المتغير العشوائي سـ بحيث يكون سـ أصغر من أو يساوي ﻫ (أ) (ب)

(٤) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير سـ: (أ) (ب)

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,١	٠,٠٥	٠,٤	٠,٤

(٥) قيمة ك التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي سـ يساوي ١ لدالة التوزيع الاحتمالي د هي صفر. (أ) (ب)

س	٢	١	صفر
د(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	ك

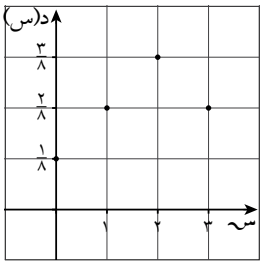
(٦) لدالة توزيع تراكمي ت للمتغير العشوائي سـ يكون:

ل(ﻫ < سـ ≤ ب) = ت(ب) − ت (ﻫ) (أ) (ب)

(٧) لدالة توزيع تراكمي ت للمتغير العشوائي سـ يكون:

ل(سـ < ﻫ) = ١ − ت (ﻫ) (أ) (ب)

(٨) بيان دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير لعشوائي سـ حيث هو: (أ) (ب)



س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$

(٩) مدرسة فيها عدد الطلبة ٣٠٠ طالب فإذا كانت نسبة النجاح ٠,٦ فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو ١٥٠ طالب. (أ) (ب)

(١٠) عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات على التوالي فإن ن(ف) = ٦ (أ) (ب)

(١١) من تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين معًا مرة واحدة فإن احتمال ظهور عددين مجموعهما ٨ هو $\frac{١}{١٢}$. (أ) (ب)

في التمارين (١٢-٣٤)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(١٢) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	-١	٠	١	٢
د(س)	٠,٢	ك	٠,٤	٠,٢

فإن قيمة ك هي:

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٤ (جـ) صفر (د) ٠,٢

(١٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	١	٢	٣
د(س)	ك	٢ك	٢ك

فإن قيمة ك تساوي:

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٢ (جـ) ١ (د) ٠,٤

في التمارين (١٤-١٦)، استخدم الجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

حيث د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

(١٤) ت(-١)

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) صفر

(١٥) ت(١,٥)

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٢ (جـ) صفر (د) ٠,٦

(١٦) ت(٤)

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,١ (جـ) ٠,٤ (د) ١

(١٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي د هي:

س	٠	١	٢
د(س)	٠,٢٥	٠,٥٠	٠,٢٥

فإن التوقع له يساوي:

(أ) ١ (ب) ١,٢٥ (جـ) ١,٥ (د) ٠,٥

(١٨) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي د
وكان التوقع = ٠,٥، $\sum س^{٢} \times د(س) = ٤,٢٥$، فإن الانحراف المعياري هو:

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣,٧٥ (د) ١

(١٩) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي س معطاة في الجدول التالي:

س	٢	٣	٤
ت(س)	٠,١	٠,٣	ك

فإن قيمة ك تساوي:

(أ) ٠,٥ (ب) ١ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٦

(٢٠) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي س معطاة في الجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
ت (س)	٠,١	٠,٣	٠,٧	١

فإن د(٢) =

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ١

(٢١) ثلاث بطاقات متماثلة مرقمة ١، ٢، ٣ سحبت عشوائيًّا بطاقتان الواحدة تلو الآخرى مع الإرجاع وكان المتغير العشوائي س هو «مجموع العددين على البطاقتين» فإن مدى س هو:

(أ) {١، ٢، ٣} (ب) {١، ٢، ٣، ٤، ٥}
(جـ) {٢، ٣، ٤، ٥} (د) {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

(٢٢) في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل هو:

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(٢٣) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س~ هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي س~ يساوي:

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) صفر

(٢٤) عند القاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين $\sigma^{٢}$ للمتغير العشوائي س~ «ظهور صورة» يساوي:

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

(٢٥) إذا كان س~ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يأخذ القيم -١، ١، ١,٥ وكان ل (س~ = -١) = ٠,٦، ل(س~ = ١) = ٠,٣ فإن ل(س~ > ٠) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٩ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧

(٢٦) إذا كان س~ متغيرًا عشوائيًّا يأخذ القيم ٢، ٣، ٤ وكان ل(س~ = ٢) = ٠,٢، ل(س~ = ٣) = ٠,٧ فإن ل(س~ = ٤) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٧ (د) ليس أيًّا مما سبق

في التمرينين (٢٧، ٢٨)، أسرة تضم ٨ أطفال، إذا كان احتمال أن يكون أي طفل ذكر هو ٠,٥ فإن:

(٢٧) احتمال أن يكون بينهم ٣ ذكور فقط هو:

(أ) ٠,٢١٣ (ب) ٠,٢٧٣ (جـ) ٠,٣٦٣ (د) ٠,٢١٩

(٢٨) احتمال أن يكون عدد الإناث يساوي عدد الذكور هو:

(أ) ٠,٢١٣ (ب) ٠,٢٧٣ (جـ) ٠,٣٦٣ (د) ٠,٢١٩

(٢٩) ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة ٠,٠٢ فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(٣٠) التوزيع الذي يمثل «توزيع احتمالي لمتغير عشوائي سـ» هو:

(أ)

س	٠	١	٣
د(س)	٠,١١	٠,٣٢	٠,٣

(ب)

س	٢	٤	٦	٨
د(س)	٠,٤	٠,٥	٠,١	٠,٠١

(جـ)

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٤	٠,٥	٠,١

(د)

س	١	٢	٣
د(س)	٠,٤	٠,٥	٠,٢

(٤-١-ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) حدّد ما إذا كانت المتغيّرات العشوائية التالية متّصلة أو متقطّعة.

(أ) الزمن (بالثواني) الذي يتطلّبه حاسوب ليفتح ملفّ ما.

(ب) المعدل السنوي للأمطار في بلد معيّن.

(جـ) الزمن المستغرق لرحلة طائرة من بلد معيّن إلى بلد آخر.

(د) سعر صفيحة الوقود.

(هـ) عدد الأحرف في أي كلمة.

(٢) إذا كان سـ متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & : \ ٢ \geq س \geq ٤ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل(٢ ≥ سـ ≥ ٤) (ب) ل(سـ ≤ ٥ , ٢).

(٣) إذا كان سـ متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥} & : \ ٠ \geq س \geq ٥ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل(٠ ≥ سـ ≥ ٥) (ب) ل(سـ = ٣).

(جـ) ل(سـ ≥ ٢) (د) ل(سـ > ٢).

(٤) لتكن الدالة د:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & : \ -١ \geq س \geq ٥ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

(أ) أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(جـ) أوجد ل(٠ < سـ ≥ ٣).

(د) أوجد التوقّع والتباين للدالة د.

(٥) لتكن الدالة د:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : \ ٢ \leq س \leq ٥ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

(أ) أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(جـ) أوجد ل(سـ ≥ ٤).

(د) أوجد ل(٣ ≥ سـ ≥ ٤).

(هـ) أوجد التوقّع والتباين للدالة د.

(٦) لتكن الدالة د:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} & : \ -٤ \leq س \leq ٤ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

(أ) أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد ل(-٥ , ٠ ≥ سـ ≥ ٥ , ١).

(جـ) أوجد التوقّع والتباين للدالة د.

(٧) الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرفة كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٧} & : \ ٠ \leq س \leq ٧ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

(أ) أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد ل$\left(٠ \leq سـ \leq \frac{٧}{٨}\right)$.

(جـ) أوجد التوقّع والتباين للدالة د.

(٨) إذا كان سـ متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢}{٩} س & : \ ٠ \leq س \leq ٣ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل(٠ ≥ سـ ≥ ٣) (ب) ل(سـ < ١) (جـ) ل(سـ ≤ ١)

(٩) إذا كان س متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} ٨ س & : \quad ٠ \leq س \leq \frac{١}{٢} \\ صفر & : \quad في ما عدا ذلك \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل($٠ \leq$ س $< \frac{١}{٢}$)　　(ب) ل(س $> \frac{١}{٤}$)　　(جـ) ل(س $\leq \frac{١}{٣}$)

(١٠) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

(أ) ل(ن $\geq ١٦ , ٢$)　　(ب) ل(ن $\leq ٥١ , ٢$)　　(جـ) ل($١ , ٥ \leq$ ن $\leq ٤ , ٢$)

(١١) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(أ) ل(ن $\geq -٠ , ٦٤$)　　(ب) ل($-١ , ٧ \leq$ ن $\leq ٥٨ , ٢$)　　(جـ) ل($-٢٣ , ١ \leq$ ن $\leq ٦٨ , ٠$)

(١٢) يمثل المتغير العشوائي س درجات الطلاب في إحدى المواد الدراسية، إذا كان توزيع درجاته يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = ٥٠$ وانحرافه المعياري $\sigma = ١٠$

فأوجد:

(أ) ل($٤٠ <$ س < ٧٦)　　(ب) ل(س ≥ ٥٥)

(١٣) متغيّر عشوائي متصل س يتبع توزيعًا طبيعيًّا، التوقع $\mu = ٣٧$، وتباينه $\sigma^{٢} = ١٦$، أوجد:

(أ) ل($٣٠ <$ س < ٣٥)

(ب) ل($٣٥ <$ س < ٤٠)

(جـ) ل(س > ٣٠)

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) إذا كان سـ متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} ٣ & : \ ٠ \leq س \leq \frac{١}{٣} \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل$\left(٠ \leq سـ \leq \frac{١}{٣}\right)$ (ب) ل$\left(سـ \geq \frac{١}{٤}\right)$ (جـ) ل$\left(سـ > \frac{١}{٤}\right)$

(٢) لتكن الدالة د: د(س) = $\begin{cases} ٢ & : \ ٠ \leq س \leq \frac{١}{٢} \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(أ) ارسم الدالة د.

(ب) أثبت أن د هي دالة كثافة احتمال.

(جـ) أثبت أن د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(د) أوجد: ل$\left(سـ \geq \frac{١}{٨}\right)$ ، ل$\left(سـ \leq \frac{١}{٢}\right)$.

(هـ) احسب توقّع والتباين المناسبين بعد تحديد التوزيع الذي تتبعه هذه الدالة.

(٣) متغيّر عشوائي سـ يتبع توزيعًا طبيعيًّا حيث إن التوقع μ = ٨٨ والتباين $\sigma^{٢}$ = ٢٥، أوجد:

(أ) ل(سـ ≥ ٨٣) (ب) ل(سـ ≤ ٧٠) (جـ) ل(٨٧ ≤ سـ ≤ ٩٠)

(٤) يمثل المتغير سـ الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول إلى المدرسة وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي توقعه μ = ١٥ والتباين $\sigma^{٢}$ = ٩. احسب احتمال وصوله بـ:

(أ) أقل من ١٨ دقيقة (ب) أكثر من ١٨ دقيقة (جـ) أكثر من ١٢ دقيقة وأقل من ١٥ دقيقة.

تمارين موضوعية

في التمارين (١-٦)، عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. (أ) (ب)

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة كالتالي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & : \ ٠ \leq س \leq ١ \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن الدالة د هي دالة كثافة احتمال. (أ) (ب)

(٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & : \ ٠ \leq س \leq \frac{١}{٢} \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن ل(سـ ≤ ٢) = ١. (أ) (ب)

(٤) إذا كانت الدالة د هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرفة كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : \ ٠ \leq س \leq ٣ \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن التباين للدالة د هو $\sigma^{٢} = \frac{٣}{٤}$. (أ) (ب)

(٥) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول س = μ (أ) (ب)

(٦) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. (أ) (ب)

في التمارين (٧-٩)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(٧) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} س & : \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ \text{صفر} & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن ل(سـ = ١) =

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ليس أيًّا مما سبق

(٨) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥} & : \ -٢ \leq س \leq ٣ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فإن ل(سـ ≥ −٥ , ٢) =

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

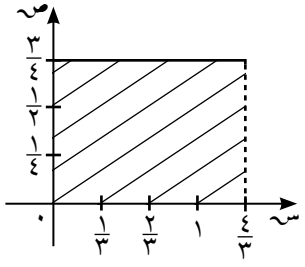
(٩) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} ٢ \ س & : \ ٠ \leq س \leq ١ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فإن ل$\left(سـ > \frac{١}{٢}\right)$ =

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

في التمارين (١٠-١٦)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:



(١٠) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

(أ) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣}{٤} & : \ ٠ < س < \frac{٣}{٤} \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$

(ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣}{٤} & : \ ٠ < س < \frac{٤}{٣} \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$

(جـ) $د(س) = \begin{cases} \frac{٤}{٣} & : \ ٠ < س < \frac{٤}{٣} \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$

(د) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣}{٤} & : \ ٠ < س < ٤ \\ صفر & : \ في \ ما \ عدا \ ذلك \end{cases}$

(١١) الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي:

(أ) الطبيعي (ب) ذات الحدين (جـ) الطبيعي المعياري (د) المنتظم

(١٢) التوقّع هو:

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٣) التباين هو:

(أ) $\frac{٤}{٢٧}$ (ب) $\frac{١٦}{٩}$ (جـ) $\frac{١٦}{١٠٨}$ (د) $\frac{١٠٨}{١٦}$

(١٤) ل$\left(س < \frac{٤}{٦}\right)$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٥) ل$\left(س > \frac{٤}{١٢}\right)$

(أ) $\frac{٢}{٦}$ (ب) $\frac{٦}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(١٦) ل(٠ < س < ١)

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٧) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د، والمحور السيني تساوي:

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٨) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي فإن ل(٠ ≤ ن ≤ ٢,٣٥) = ...

(أ) ٠,٩٩٠٦ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٤٩٠٦ (د) ٠,٢١٨

(١٩) إذا كان ن متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فإن ل(ن > ك) لا يساوي:

(أ) ل(ن ≤ ك) (ب) ١ - ل(ن < ك)

(جـ) ل(ن ≥ ك) (د) ١ - ل(ن ≥ ك)

تمارين إثرائية

(١) متغير عشوائي س~ يتبع توزيعًا طبيعيًّا توقعه μ = ٥٥ وتباينه $\sigma^{٢}$ =٢٥، أوجد:

(أ) ل(س~ > ٥٥)

(ب) ل(س~ < ٥٠)

(جـ) ل(٣٠ < س~ < ٤٠)

(٢) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س~ هي:

س	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢
د (س)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	ك	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$

(أ) أوجد ك.

(ب) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي د.

(جـ) أوجد دالة التوزيع التراكمي ت.

(د) ارسم دالة التوزيع التراكمي ت.

(٣) مدفع يتبع مداه توزيعًا طبيعيًّا توقعه ١٤ كم وتباينه ١ كم.

(أ) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من ١٥ كم؟

(ب) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من ١١ كم؟

(جـ) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين ١٣ و١٥ كم؟

اختبار الوحدة الرابعة

أسئلة مقالية

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو {٢، ٣، ٤، ٥} وكان د(٢) = ٠,٣، د(٣) = ٠,٢، د(٤) = ٠,١

فأوجد د(٥)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

(٢) يحتوي صندوق على ٨ كرات متماثلة منها: ٥ كرات حمراء و٣ كرات صفراء سحبت ٤ كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:

(أ) عدد عناصر فضاء العينة ن(ف).

(ب) مدى المتغير العشوائي س.

(جـ) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

(د) دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

(٣) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	٣	٤	٥	٦
ل(س)	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٣}{١١}$	$\frac{١}{١١}$

أوجد:

(أ) التوقع (μ). (ب) التباين ($\sigma^٢$). (جـ) الانحراف المعياري σ.

(٤) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	٠,١٤	٠,١٦	٠,٣٥	٠,١٥	٠,٢

أوجد:

ت(١)، ت(٢)، ت(٣)، ت(٥, ٣)، ت(٤)، ت(٥)، ت(٦)، ت(٧).

(٥) ينتج مصنع أجبان ١ ٢٥٠ علبة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة ٠,٠٤ فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:

(أ) التوقع (μ). (ب) التباين ($\sigma^٢$). (جـ) الانحراف المعياري (σ).

(٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥} & : \ -٢ \leq س \leq ٣ \\ صفر & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل(٠ ≤ سـ ≤ ٣)　　(ب) ل(-٢ ≤ سـ ≤ ٠)

(جـ) ل(سـ = ٢)　　(د) ل(-١ ≤ سـ ≤ ٢)

(٧) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٩}{٢} س & : \ ٠ \leq س \leq \frac{٢}{٣} \\ صفر & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) ل(٠ ≤ سـ ≤ $\frac{١}{٣}$)　　(ب) ل(سـ ≤ $\frac{١}{٣}$)

(٨) الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} & : \ -٣ \leq س \leq ٥ \\ صفر & : \ \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(أ) أثبت أن د هي دالة كثافة احتمال.

(ب) أوجد ل(-١ ≤ سـ ≤ ٣)

(جـ) أوجد التوقع والتباين للدالة د.

(٩) إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي سـ، فأوجد:

(أ) ل(ن ≥ ٣,٢٤)　　(ب) ل(ن ≤ ١,٥٢)　　(جـ) ل(١,٤ ≤ ن ≤ ٢,٦)

(١٠) يمثّل المتغير سـ درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = ٤٠$ وانحرافه المعياري $\sigma = ٨$ فأوجد:

(أ) ل(٣٠ < سـ < ٦٥)　　(ب) ل(سـ ≥ ٤٥)

تمارين موضوعية

في التمارين (١-٤)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيحة.

(١) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٠,١٦	٠,٢٤	ك	٠,١٥	٠,٢

فإن قيمة ك =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,١

في التمرينين (٢، ٣)، استخدم الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢٤	٠,٣	٠,٢٦	٠,١٥	٠,٠٥

حيث د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ:

فإن:

(٢) ت(٢) =

(أ) ٠,٢٤ (ب) ٠,٥٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢٦

(٣) ت(٥, ٤) =

(أ) ٠,١٥ (ب) ٠,٢٦ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٩٥

(٤) ينتج مصنع سيارات ١٥٠ سيارة في الشهر، إذا كانت نسبة السيارات المعيبة ٠,٠٢ فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في شهر واحد هو:

(أ) ٣ (ب) ٣٠ (جـ) ٢ (د) ٦٠

المتباينات
Inequalities

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية:

(١) ٣ + س ≤ ٧ (٢) -١١ < ٣ س - ٢ ≥ ٤ (٣) ١٣ - ٥س < ٨

(٤) بين أيًّا من النقاط التالية: أ (٢، ١)، ب (٧، ٠)، جـ (-١، ٢). تحقق المتباينة: ٣س + ٥ص ≥ ١٢.

في التمرينين (٥-٦)، ارسم خط الحدود لكلِّ متباينة:

(٥) (أ) ص + س > ٥ (ب) ٣س + ٢ص ≥ ١٨ (جـ) ص ≤ ٣ - ٢س (د) س - ص - ٢ < ٠

(٦) (أ) س ≤ -٣ (ب) ص > ٢ (جـ) س - ٥ > ٠ (د) ٢ص ≥ ٨

في التمارين (٧-١٠)، مثّل بيانيًّا منطقة الحل لكلِّ متباينة:

(٧) س + ص > ٣ (٨) س - ٣ ص < ٦ (٩) ٢س - ٣ ص ≥ ٠ (١٠) ٢س + ٤ ص ≤ ١٢

(١١) مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

س + ص < ٣ ، ٥ س + ٢ ص ≤ ١٠

في التمارين (١٢-١٧)، مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

(١٢) س + ٢ص ≤ ٤ ، ص ≥ -س - ١

(١٣) ص > س + ٢ ، ص ≥ -س + ١

(١٤) ص ≥ س + ٣ ، ص ≤ س + ٢

(١٥) س - ٢ص < ٣ ، ٢س + ص > ٨

(١٦) ص > س - ٣ ، ص ≤ س - ٤

(١٧) -٢س + ص > ١ ، ص > س

(١٨) يحتاج مسؤول المخيم إلى ٣٠ شخصًا كحد أقصى لتنظيم رحلة تخييم، ويحتاج من بينهم إلى ١٠ على الأقل لإعداد الخيم وإلى ٥ آخرين على الأقل لجمع الحطب

(أ) اكتب نظام متباينات لتمثيل المسألة. (ب) مثّل بيانيًّا النظام وحلّه.

في التمارين (١٩-٢١)، مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

(١٩) س + ص ≥ ٢ ؛ س - ص > ١ ؛ ٢س + ٣ ص < ٦

(٢٠) س ≤ ص ؛ ٢س + ص ≥ ٢ ؛ ص + ١ < ٣

(٢١) س + ص ≤ ٣ ؛ س - ص ≥ ٤ ؛ ص ≥ ٠

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٦)، أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية:

(١) $٣س - ٤ > ٥$

(٢) $٤ \geq ٢س + ٣ > ١٣$

(٣) $٧ - ٢س \leq ٧$

(٤) $-١ > ٤ - ٣س \geq ٥$

(٥) $٥س - ٢ > ٨$

(٦) $\frac{١}{٢}س + ١ \geq ٣$

(٧) بين أيًّا من النقاط التالية: أ (٠، ٠) ، ب (٨، -٢) ، جـ (٢، ٣) ، د (-١، ٥)

تحقق المتباينة: $٢س + ٣ص \leq ١٠$.

في التمارين (٨-١١)، مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

(٨)
$$\begin{cases} س + ص > ٥ \\ ص > ٣س - ٢ \end{cases}$$

(٩)
$$\begin{cases} -٣س + ص > ٣ \\ س + ص \leq -١ \end{cases}$$

(١٠)
$$\begin{cases} س - ص > ٢ \\ ٢س + ص \geq ١٥ \end{cases}$$

(١١)
$$\begin{cases} س + ٢ص > ٤ \\ ٢س - ص > ٦ \end{cases}$$

(١٢) لنفرض أنّك تريد شراء نوعين من كتب المطالعة. سعر الكتاب باللغة العربية دينارين وسعر الكتاب باللغة الأجنبية ٥ دنانير. يجب أن تشتري ٦ كتب على الأقل ويجب ألا يتخطى سعر الكتب المشتراة ٢٠ دينارًا.

(أ) اكتب نظام متباينات لتمثيل المسألة.

(ب) مثّل بيانيًّا النظام وحلّه.

في التمارين (١٣-١٥)، مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

(١٣)
$$\begin{cases} ص - س > ١ \\ س + ٢ص \geq ١٢ \\ ص \leq ٣ \end{cases}$$

(١٤)
$$\begin{cases} ٢س + ص < ٤ \\ س - ص \geq ٢ \\ س - ١ \leq ٠ \end{cases}$$

(١٥)
$$\begin{cases} ص > -٢ \\ ص > س \\ ص + س < ٠ \end{cases}$$

تمرَّنْ
٢-٥

البرمجة الخطية
Linear Programming

المجموعة ٢ تمارين أساسية

(١) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٥ ، س + ٢ص ≥ ٨

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن، حيث هـ = س + ٣ص.

(٢) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

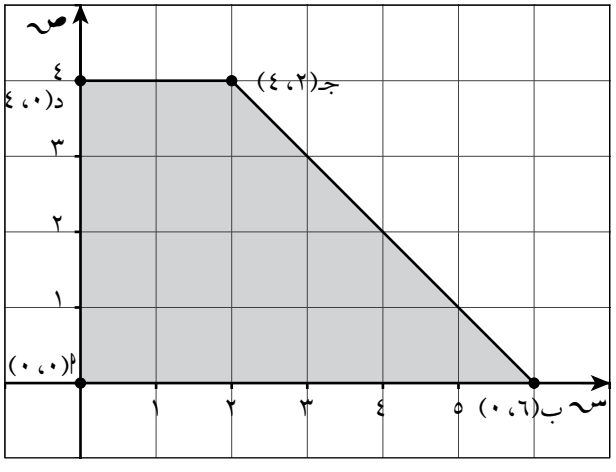
س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٣س + ٢ص ≥ ٦ ، ٢س + ٣ص ≥ ٦

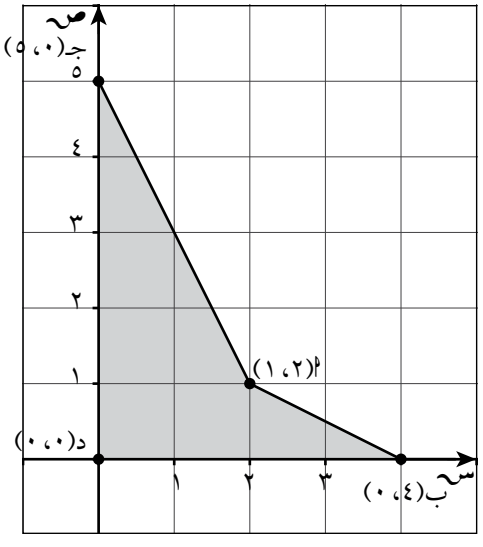
ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن ، حيث هـ = ٣س + ٤ص.

في التمرينين (٣-٤)، أوجد قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ قيمة عظمى أو قيمة صغرى حيث:

(٣) دالة الهدف هـ = ٦س + ٢ص

(٤) دالة الهدف هـ = ٤س + ص





المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٤س + ٢ص ≥ ٤ ، ٢س + ٤ص ≥ ٤

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن، حيث هـ = ٣س + ص.

(٢) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

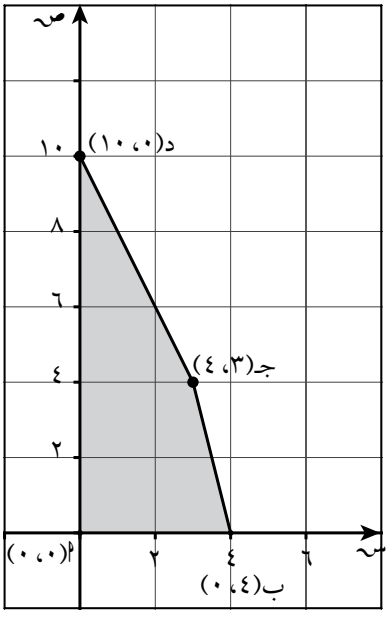
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≥ ٥ ، ٤س + ص ≥ ٨

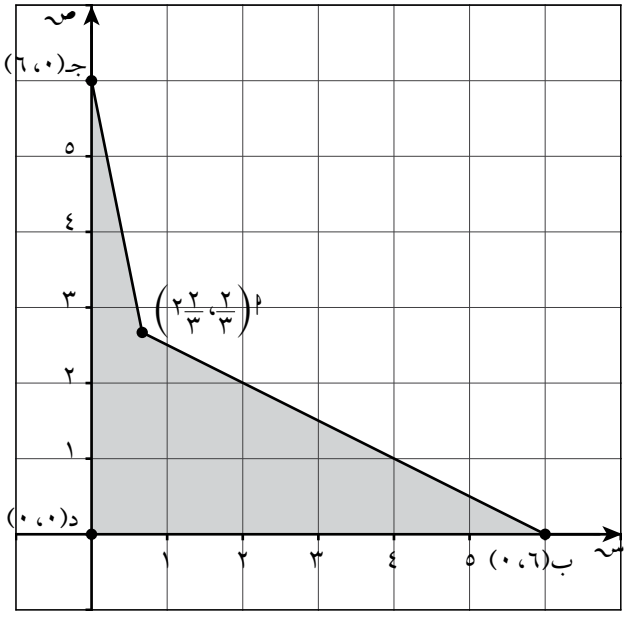
ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = س + ٣ص.

في التمرينين (٣-٤)، أوجد قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ قيمة عظمى أو قيمة صغرى حيث:

(٣) دالة الهدف هـ = س + ص

(٤) دالة الهدف هـ = س + ٩ص





تمارين إثرائية

في التمرينين (١، ٢)، ظلّل المنطقة التي يحددها كل نظام مما يلي:

(١)
$$\left.\begin{array}{l} س + ص \geq ١ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \\ س > ٣ \end{array}\right\}$$

(٢)
$$\left.\begin{array}{l} س - ص \geq ٢ \\ ص + س \geq ٣ \\ ص > -٤ \\ س > -١ \end{array}\right\}$$

(٣) يحضر بائع يوميًّا نوعين من الكعك المحلى. لتحضير كعكة من النوع الأول يلزمه ٤ أكواب من الحليب، و٣ أكواب من الطحين ولتحضير كعكة من النوع الثاني يلزمه كوبين من الحليب و٣ أكواب من الطحين. إذا كان لديه ١٦ كوبًا من الحليب و١٢ كوبًا من الطحين ويربح ٣ دنانير من مبيع كعكة من النوع الأول ودينارين من مبيع كعكة من النوع الثاني. فاكتب نظام متباينات وحله لمعرفة عدد الكعكات التي عليه تحضيرها من كل نوع لتحقيق ربح أقصى. وما هو هذا الربح؟

اختبار الوحدة الخامسة

أسئلة مقالية

(١) أوجد حل المتباينتين ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية.

(أ) ٣ - س ≤ ٧

(ب) -١٠ < ٣س + ٢ ≤ ٥

(٢) بين أيًّا من النقاط التالية: أ (١، ٢) ، ب (١٣، ٠) ، جـ (٣، -٤) تحقق المتباينة: س - ٢ص ≤ ١٣ .

(٣) مثّل بيانيًّا منطقة الحل للمتباينة: س + ٥ص < ٠

(٤) مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

س + ص > ٤ ، ٣ س - ص ≥ ٩

(٥) مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

$$\left\{\begin{array}{l} س \leq ص \\ س + ٣ص \geq ٩ \\ س - ١ < ٢ \end{array}\right.$$

(٦) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٤س + ص ≥ ١٠ ، ٢س + ص ≥ ٨

ثم أوجد من مجموعة لحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن وأكبر ما يمكن، حيث هـ = س + ٣ص.

(٧) أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٤س + ٣ص ≤ ٣٠ ، س + ٣ص ≤ ٢١

ثم أوجد من مجموعة لحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن، حيث هـ = ٥س + ٨ص.

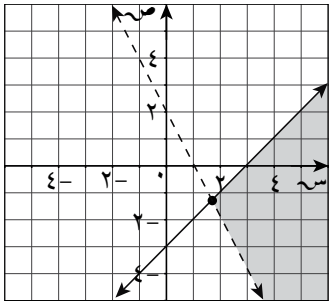
تمارين موضوعية

في التمارين (١-٥)،عبارات ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) المنطقة المظللة في الشكل تمثّل الحل المشترك للمتباينتين:

$$\left.\begin{array}{l} ٢س + ص > ٢ \\ س - ص > ٣ \end{array}\right\}$$

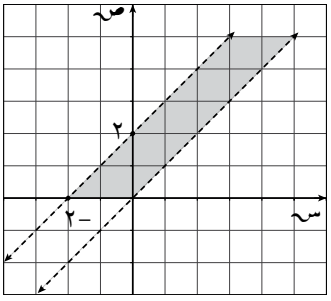
(أ) (ب)



(٢) المنطقة المظللة في الشكل تمثّل الحل المشترك للمتباينات:

$$\left.\begin{array}{l} ص > س \\ ص < س + ٢ \\ ص \leq ٠ \end{array}\right\}$$

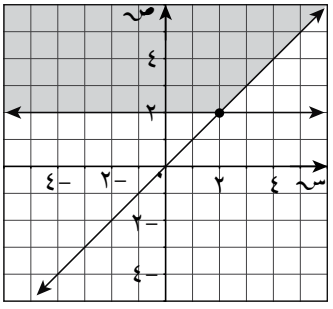
(أ) (ب)



(٣) المنطقة المظللة في الشكل تمثّل الحل المشترك للمتباينتين:

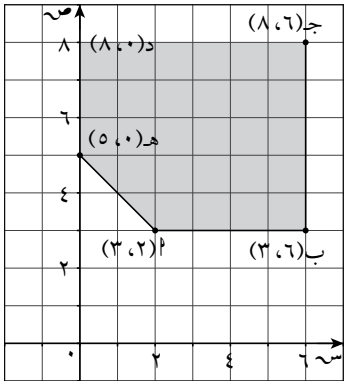
$$\left.\begin{array}{l} ص \leq ٢ \\ ص \leq س \end{array}\right\}$$

(أ) (ب)



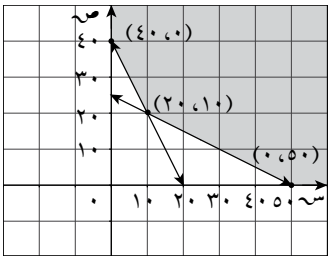
(٤) قيم س، ص التي تجعل دالة الهدف هـ = ٥س + ١٠ص أصغر ما يمكن هي (٢، ٣)

(أ) (ب)



(٥) المنطقة المظللة في الشكل تمثّل الحل المشترك للمتباينات:

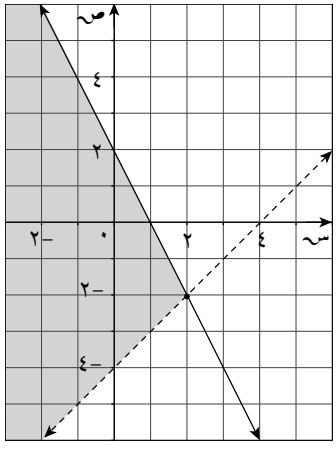
$$\left.\begin{array}{l} ٢س + ص \leq ٤٠ \\ س + ٢ص \leq ٥٠ \\ س \geq ٠ ، ص \geq ٠ \end{array}\right\}$$



(أ) (ب)

في التمارين (٦-١١)، لكل تمرين أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(٦) المنطقة المظللة من الشكل تمثّل الحل المشترك للمتباينتين



(أ) $\left.\begin{array}{l} ص < -٢س + ٢ \\ ص \leq س - ٤ \end{array}\right\}$

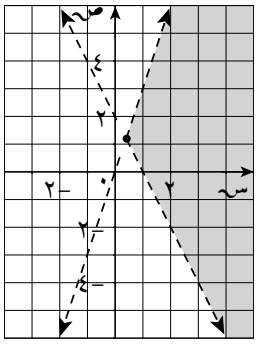
(ب) $\left.\begin{array}{l} ص \leq -٢س + ٢ \\ ص \geq س - ٤ \end{array}\right\}$

(جـ) $\left.\begin{array}{l} ص \leq -٢س + ٢ \\ ص > س - ٤ \end{array}\right\}$

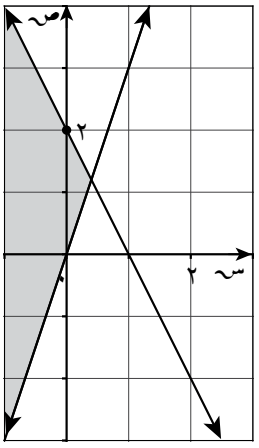
(د) $\left.\begin{array}{l} ص \geq -٢س + ٢ \\ ص > س - ٤ \end{array}\right\}$

(٧) الرسم البياني الذي يمثّل نظام المتباينات $\begin{cases} ص \leq -٢س + ٢ \\ ص \geq ٣س \end{cases}$ هو:

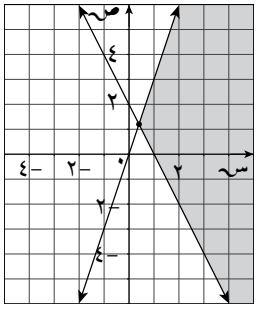
(أ)



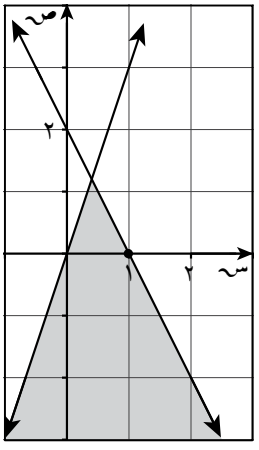
(ب)



(جـ)



(د)



(٨) أي زوج من النقاط التالية هو ضمن مجموعة حل النظام التالي:

$\begin{cases} ص < ٥س - ١ \\ ص \leq ٧ - ٣س \end{cases}$

(أ) (-٥، ١)　(ب) (٢، -٣)　(جـ) (٤، ٤)　(د) (١، ٦)

(٩) إذا كانت رؤوس منطقة الحل هي (٠، ٠)، (٣، ٠)، $\left(\frac{٣}{٢}، \frac{٧}{٢}\right)$، (٠، ٣) لدالة الهدف هـ = ٦س + ٨ص فإن القيمة العظمى لها هي:

(أ) ٣٧　(ب) ٢٤

(جـ) ٤٧　(د) ٣٠

(١٠) في نظام المتباينات $\begin{cases} س + ص \geq ٨ \\ س + ٢ص \geq ١٤ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \end{cases}$ تكون دالة الهدف هـ = ٢س + ص أصغر ما يمكن عند:

(أ) (٠، ٠)　　(ب) (٠، ٧)

(جـ) (٢، ٦)　　(د) (٨، ٠)

(١١) نظام المتباينات الذي له الرؤوس التالية: (٠، ٥)، (١، ٤)، (٣، ٠)، (٠، ٠) هو:

(أ) $\begin{cases} س + ص \leq ٥ \\ ٢س + ص \leq ٦ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \end{cases}$　　(ب) $\begin{cases} س + ص \geq ٥ \\ س + ٢ص \geq ٦ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \end{cases}$

(جـ) $\begin{cases} س + ص \geq ٥ \\ ٢س + ص \geq ٦ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \end{cases}$　　(د) $\begin{cases} س + ص \geq ٥ \\ ٢س + ٢ص \geq ٦ \\ س \leq ٠ ، ص \leq ٠ \end{cases}$