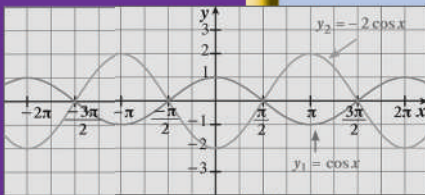
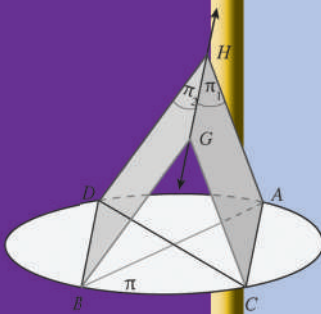


الرياضيات

كّراسة التمارين



الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

كّراسة التمارين

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيساً)

أ. فتحة محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الثانية

١٤٤٣ هـ

٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م

الطبعة الأولى ٢٠١٣ م

الطبعة الثانية ٢٠١٥ م

٢٠١٧ م

٢٠١٩ م

٢٠٢٠ م

٢٠٢١ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيساً)

أ. حسين اليماني الشامي

أ. مصطفى محمد شعبان محمود

أ. صديقة أحمد صالح الانصاري

أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التّربويّون House of Education ش.م.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣ م

شاركنا بتقييم مناهجنا



الكتاب كاملاً



طبع في: شركة مطابع الخط

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٢٤٥) بتاريخ ١٧/٦/٢٠١٥ م



حضرة صاحب السمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Nawaf AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Amir Of The State Of Kuwait



سمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتويات

الوحدة السابعة: الأعداد المركبة

| | | |
|----|-------|-----------------------|
| 9 | | تَمَرْنُ 7-1 |
| 12 | | تَمَرْنُ 7-2 |
| 15 | | تَمَرْنُ 7-3 |
| 17 | | اختبار الوحدة السابعة |
| 18 | | تمارين إثرائية |

الوحدة الثامنة: حساب المثلثات

| | | |
|----|-------|-----------------------|
| 19 | | تَمَرْنُ 8-1 |
| 22 | | تَمَرْنُ 8-2 |
| 25 | | تَمَرْنُ 8-3 |
| 28 | | تَمَرْنُ 8-4 |
| 30 | | تَمَرْنُ 8-5 |
| 32 | | اختبار الوحدة الثامنة |
| 33 | | تمارين إثرائية |

الوحدة التاسعة: تطبيقات على حساب المثلثات

| | | |
|----|-------|-----------------------|
| 34 | | تَمَرْنُ 9-1 |
| 36 | | تَمَرْنُ 9-2 |
| 38 | | تَمَرْنُ 9-3 |
| 40 | | تَمَرْنُ 9-4 |
| 42 | | تَمَرْنُ 9-5 |
| 44 | | اختبار الوحدة التاسعة |
| 45 | | تمارين إثرائية |

الوحدة العاشرة: الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

| | | |
|----|-------|-----------------------|
| 47 | | تَمَرْنُ 10-1 |
| 51 | | تَمَرْنُ 10-2 |
| 54 | | تَمَرْنُ 10-3 |
| 57 | | تَمَرْنُ 10-4 |
| 60 | | تَمَرْنُ 10-5 |
| 63 | | اختبار الوحدة العاشرة |
| 65 | | تمارين إثرائية |

الوحدة الحادية عشرة: الجبر المتقطع

| | | |
|----|-------|----------------------------|
| 67 | | تَمَرْنُ 11-1 |
| 70 | | تَمَرْنُ 11-2 |
| 72 | | تَمَرْنُ 11-3 |
| 76 | | اختبار الوحدة الحادية عشرة |
| 77 | | تمارين إثرائية |

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (5-8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2 + \sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1} + 2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50} - 2}{6}$

(8) $\frac{\sqrt{-8} + 8}{2}$

في التمارين (9-11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x + 3yi = -14 + 9i$

(10) $3x + 19i = 16 - 8yi$

(11) $14i^2 - 3i = 2x + (y + 5)i$

(12) مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1 = -2 + 3i$

(b) $z_2 = -4$

(c) $z_3 = -i$

(d) $z_4 = 2(2 + i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4, 5)$

(b) $M(-4, -2)$

(c) $N(-2, 6)$

(d) $P(0, -3)$

في التمارين (14-23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2 + 4i) + (4 - i)$

(15) $6 - (8 + 3i)$

(16) $(4 + \sqrt{-9}) + (6 - \sqrt{-49})$

(17) $(8 - \sqrt{-1}) - (-3 + \sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1 + 2i) + 3i(3 - 4i)$

(21) $(-6 - 5i)(1 + 3i)$

(22) $(-2 + \sqrt{-9})(6 + \sqrt{-25})$

(23) $i(-6i)^3$

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27}

(25) إذا كان $z_1 = 2+i$, $z_2 = -3+4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$

(b) $z_1 \cdot z_2$

(c) z_1^3

(d) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

(e) $\overline{z_1} - \overline{z_2}$

(f) $z_1 \cdot \overline{z_2}$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: \overline{z}

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$

(b) $5i$

(c) $3i-4$

(28) إذا كان $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+2i$ فأوجد: $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

(29) تفكير ناقد: أوجد العلاقة بين x , y عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a)

(b)

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3 + \sqrt{-4}$ هي: $3 + 2i$

(a)

(b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3 + 4i$ هو: $\overline{z} = -3 - 4i$

(a)

(b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3 - 2i$ هو: $-z = 3 + 2i$

(a)

(b)

(4) الصورة المبسطة للتعبير: $(12 + 5i) - (2 - i)$ هي: $10 + 6i$

في التمارين (14-5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $\sqrt{-225} + 32$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

- (a) $-15 + 6i$ (b) $6 + 15i$ (c) $6 - 15i$ (d) $32 + 15i$

(6) حل المعادلة: $-10 - 6i = 2x + 3yi$ هو:

- (a) $x = 5, y = -2$ (b) $x = -5, y = -2$ (c) $x = -5, y = 2$ (d) $x = 5, y = 2$

(7) إذا كان $z_1 = 5i + 2$ ، $z_2 = -3 - i$ فإن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ تساوي:

- (a) $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $xi^2 + 3yi = 5 + 3i^5$ فإن (x, y) تساوي

- (a) $(5, 1)$ (b) $(-5, -1)$ (c) $(5, -1)$ (d) $(-5, 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$ هي:

- (a) $18 + 17i$ (b) $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$
(c) $6 + 17i$ (d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1 + 2i)^2$ هي:

- (a) $z = -3 + 4i$ (b) $z = 5 + 4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (2 - i)^3$ هي:

- (a) $z = 14 + 13i$ (b) $z = 14 - 13i$ (c) $z = 2 - 11i$ (d) $z = 2 - 13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \frac{i}{i+2}$ هي:

- (a) $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ (b) $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
(c) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ (d) $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z = i$ فإن z^{250} يساوي:

- (a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

(14) ليكن $x \in \mathbb{Z}^+$ فإن مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5 + i^x)$ عددًا حقيقيًا هي:

- (a) \mathbb{Z}^+ (b) $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ (c) $\{1, 3, 5, \dots\}$ (d) $\{2, 4, 6, \dots\}$

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5 + 12i|$

(b) $|2 - 2i|$

(c) $|2i|$

في التمارين (2-7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $(2, \frac{\pi}{3})$

(3) $(1, \frac{3\pi}{4})$

(4) $(1.5, \frac{7\pi}{3})$

(5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270^\circ)$

(7) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6})$

في التمارين (8-13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$

(9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$

(11) $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (14-21)، ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية:

(14) $3i$

(15) $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$

(19) $\sqrt{3} + i$

(20) 8

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

في التمارين (22-28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$

(23) $8(\cos 30^\circ - i \sin(-150^\circ))$

(24) $-\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$

(25) $2(\cos 45^\circ + i \sin 405^\circ)$

$$(26) 4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(27) 5\left(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)\right)$$

$$(28) 3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

في التمارين (29–33)، ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية:

$$(29) 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$(30) \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(31) \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$(32) 7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$(33) \sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b) (1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$

(a) (b) (2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$

(a) (b) (3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ هي: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

(a) (b) (4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(a) (b) (5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$

(a) (b) (6) السعة الأساسية للعدد $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$ هي 330°

في التمارين (7–13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

(b) $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

(d) $z = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

(b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

(b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإن قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35 - 12i$

(b) $35 + 12i$

(c) $81 - 12i$

(d) $81 + 12i$

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\bar{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$

في التمارين (5-9)، أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

(10) لتكن المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

(11) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

(14) حل المعادلة: $(2 + i)z^2 = 22 - 19i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $1, -1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i, z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

في التمارين (7-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (1-4)، بسّط كلاً من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9} - 2$

(2) $(4 - i) + (5 - 9i)$

(3) $(-3 + 2i) - (6 + i)$

(4) $(2 + 3i)(8 - 5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3 - 7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7 - 2i$

(7) أوجد كلاً مما يلي:

(a) $-3i^{77}$

(b) i^{50}

(c) $(-2 + 3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2 + 10 = 0$

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى صورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حلّ المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في صورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-3i$

(c) $2\sqrt{3} + 6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8 + 6i$

(17) (a) أثبت أن $-2 + \frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

تمارين إثرائية

(1) أثبت أن النقاط الممثلة للأعداد:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -i, i$$

تنتمي إلى دائرة واحدة.

(2) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في صورة المثلثية.

(3) أثبت أن النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد المركبة $z_A = 1$, $z_B = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$$z_C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_D = 2$$

تشكل معيّنًا.

(4) اكتب العدد $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(5) أثبت أن $(1+i)^8$ هو عدد حقيقي موجب.

(6) إذا كان $|z|=1$, أثبت أن $\bar{z} = \frac{1}{z}$

(7) (a) أثبت أن $1+i$ هو أحد أصفار $f(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$

(b) استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $f(z)$ على $z = 1+i$

(8) أوجد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد المركب z بحيث تكون سعته الأساسية تساوي $\frac{\pi}{3}$

(9) (a) أثبت أن: $1+i$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذران للمعادلة: $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$ (1)

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة (1).

(c) أثبت أن $f(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$ يمكن أن تكتب على شكل كثيرتي حدود من الدرجة الثانية مضروبتي

في بعضهما بعضًا.

(10) (a) أثبت أن -1 هو أحد أصفار $f(z) = z^2 + 2(3-i)z + 5 - 2i$

(b) أوجد الصفر الثاني.

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3 \cos x$

(b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3 \sin \frac{x}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

(b) الدورة π , $a = \frac{1}{3}$

(c) الدورة 4π , $a = -4$

(3) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة 3π , $a = 5$

(b) الدورة π , $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3}{5}$

(4) مثل بيانياً دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2 \sin x$

(b) $y = -3 \sin x$

(c) $y = 0.5 \sin 2x$

(d) $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$

(e) $y = -\sin 5x$

(f) $y = 3 \cos x$

(g) $y = 3 \cos 5x$

(h) $y = -\cos 3x$

(i) $y = \cos 2x$

(5) حدّد دورة كل دالة مما يلي:

(a) $y = \tan 5x$

(b) $y = \tan \frac{3x}{2}$

(6) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$ (b) الدورة $\frac{2\pi}{3}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{4}$

(7) مثل بياناً دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = \tan 2x$

(b) $y = \tan \frac{x}{2}$

(c) $y = -3 \tan x$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a \sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5 \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$

(a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3 \sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$

(a) (b)

(3) الدالة $y = 3 \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$

(a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4 \cos(6x)$

(a) (b)

(5) سعة الدالة $y = -5 \cos 2x$ هي -5

(a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a \cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$

(a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $f(x) = \cos 8x$ ، $g(x) = \tan 4x$ لهما نفس الدورة.

(a) (b)

في التمارين (8-17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

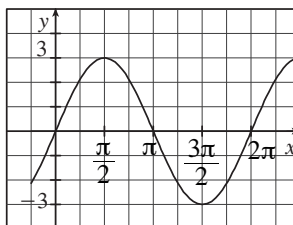
(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:

(a) $f(x) = 3 \cos x$

(b) $f(x) = 3 \sin x$

(c) $f(x) = -3 \sin x$

(d) $f(x) = \sin 3x$



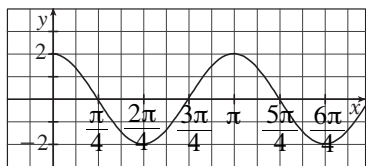
(9) لتكن $f(x) = 3 \tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1

(b) السعة = 2

(c) السعة = 3

(d) ليس لها سعة



(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:

فإن f يمكن أن تكون:

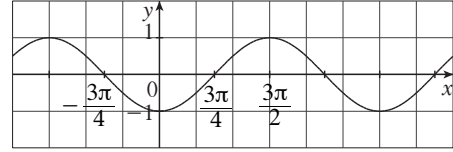
(a) $2 \cos 2x$

(b) $\cos 2x$

(c) $\cos \frac{x}{2}$

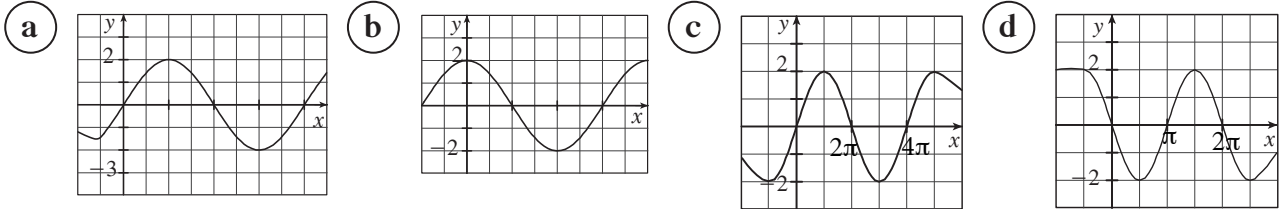
(d) $\sin 2x$

(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:



- (a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:



(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a \cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

- (a) $y = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (b) $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$
(c) $y = -4 \cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ (d) $y = 4 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a \cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (b) $y = 8 \cos(8x)$
(c) $y = 2 \cos(8x)$ (d) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a \sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (b) $y = 3 \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$
(c) $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (d) $y = 3 \sin(4x)$ أو $y = -3 \sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

- (a) $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ (b) $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$
(c) $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ (d) $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2 \sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

- (a) $-2, \frac{3\pi}{5}$ (b) $2, \frac{10\pi}{3}$
(c) $2, \frac{3\pi}{5}$ (d) $2, \frac{2\pi}{15}$

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f , h لكل مما يلي:

- (a) $f(x) = \cos 2x$, $h(x) = \frac{5}{3} \cos 2x$ (b) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $h(x) = \frac{-2}{3} \sin \frac{x}{3}$
(c) $f(x) = \sin x$, $h(x) = \sin 3x$ (d) $f(x) = \cos x$, $h(x) = \cos \frac{x}{5}$
(e) $f(x) = \sin x$, $h(x) = -\frac{1}{3} \sin(-2x)$ (f) $f(x) = \cos x$, $h(x) = 1.5 \cos 4x$
(g) $f(x) = \cos 2x$, $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (h) $f(x) = \sin 3x$, $h(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
(i) $f(x) = 0.3 \cos 2x$, $h(x) = 0.3 \cos 2x + 4$ (j) $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}$, $h(x) = 3 \sin \frac{x}{2} - 1$

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

(3) وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin \theta$ أو $y = \cos \theta$, ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

- (a) $y = -2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$
(b) $y = 3.5 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) يمثل منحنى الدالة $f(x) = 4 \sin(3x)$ تمددًا رأسيًا بمعامل 4 وانكماشًا أفقيًا بمعامل 3 لمنحنى الدالة: $g(x) = \sin x$

- (a) (b)

(2) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$ إزاحة إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة

(a) (b)

وإزاحة إلى الأعلى 4 وحدات لمنحنى الدالة: $g(x) = \cos x$

(a) (b)

(3) يمثّل منحنى الدالة $y = 2 \cos x$ تمددًا رأسيًا بمعامل 2 لمنحنى الدالة $y = \cos x$

(a) (b)

(4) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = 4 \cos(x - 3)$ انكماشًا رأسيًا معامله

4 وإزاحة أفقية مقدارها 3 وحدات إلى اليمين لمنحنى الدالة $g(x) = \cos x$

(a) (b)

(5) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = 3 \sin(x + 4)$ تمددًا رأسيًا بمعامله 3 وإزاحة أفقية

مقدارها 4 وحدات إلى اليسار لمنحنى الدالة $y = \sin x$

في التمارين (10-6)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(6) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -\sin(x - 5)$ لمنحنى الدالة $g(x) = \sin x$:

(a) انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.

(b) انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.

(c) انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.

(d) انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.

(7) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = \sin(2x - 6) - 5$ لمنحنى الدالة $g(x) = \sin x$:

(a) انكماشًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{2}$ ، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 إلى الأسفل.

(b) تمددًا أفقيًا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى

الأعلى.

(c) انكماشًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{2}$ ، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى

الأسفل.

(d) تمددًا أفقيًا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى

الأسفل.

(8) يمثّل منحنى الدالة $f(x) = -4 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ لمنحنى الدالة $g(x) = -\cos x$:

(a) انكماشًا رأسيًا معامله $\frac{1}{4}$ وتمددًا أفقيًا معامله 3.

(b) تمددًا رأسيًا معامله 4 وتمددًا أفقيًا معامله 3.

(c) انكماشًا رأسيًا معامله 4 وانكماشًا أفقيًا معامله 3.

(d) تمددًا رأسيًا معامله 3 وانكماشًا أفقيًا معامله 4.

(9) يمثل منحنى الدالة $f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) + 3$ لمنحنى الدالة $g(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$:

- (a) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليسار.
- (b) إزاحة رأسية بمقدار $\frac{\pi}{8}$ وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار 3 وحدات لجهة اليمين.
- (c) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.
- (d) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.

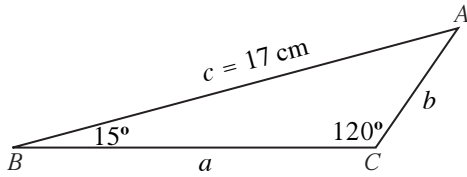
قانون الجيب

Law of Sine

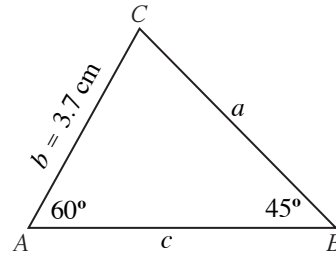
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، حلّ كلّ من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



في التمرينين (3-4)، حلّ المثلث ABC :

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ, a = 17 \text{ cm}, b = 11 \text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32 \text{ cm}, b = 28 \text{ cm}$

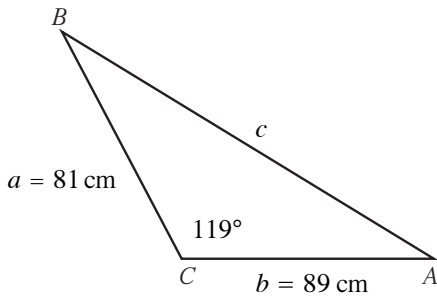
في التمرينين (5-6)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلّ منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68^\circ, a = 19 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}$

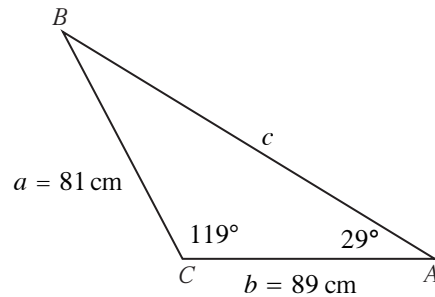
(6) $m(\widehat{B}) = 57^\circ, a = 11 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}$

في التمرينين (7-8)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكناً. وإذا لم يكن ممكناً فاشرح السبب.

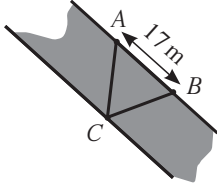
(7)



(8)



(9) مسح جداول المياه: تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(\widehat{ABC}) = 53^\circ$ ، $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$

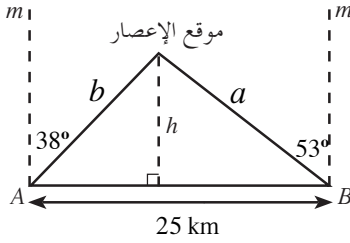


(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

(10) التوقع بحالة الطقس: وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر

في شرق الطريق عند النقطة B ، تفصل بينهما مسافة 25 km



رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 100^\circ$ ، $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ ، $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ $AC = 10.154\text{ cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC : $m(\widehat{B}) = 80^\circ$ ، $AB = 12\text{ cm}$ ، $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ (a) (b)

في التمارين (4-9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 80^\circ$ ، $m(\widehat{B}) = 40^\circ$ ، $AC = 10\text{ cm}$ فإنّ طولي \overline{AB} ، \overline{BC} يساويان:

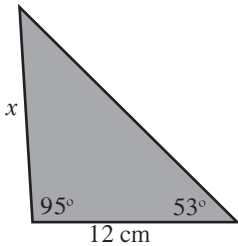
(a) 7.43 cm , 15.32 cm

(b) 6.53 cm , 13.47 cm

(c) 13.47 cm , 15.32 cm

(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالي:



(a) 8.6 cm

(b) 15 cm

(c) 18.1 cm

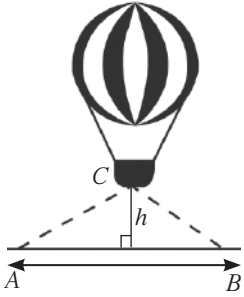
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ ، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

- (a) 11 cm (b) 11.5 cm (c) 12 cm (d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 56^\circ$ ، $AB = 19$ cm، $AC = 23$ cm، طول \overline{BC} يساوي:

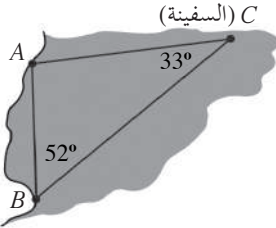
- (a) 12 cm (b) 18 cm
(c) 19 cm (d) لا يمكن استخدام قانون الجيب



(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B ، منطاداً، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي 28° وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي 37° ، فإن ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:

- (a) $h \approx 1200$ m (b) $h \approx 2500$ m
(c) $h \approx 940$ m (d) $h \approx 880$ m

(9) تقع منارتان A, B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما 20 km،



إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(\widehat{ACB}) = 33^\circ$ وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(\widehat{ABC}) = 52^\circ$ ، فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:

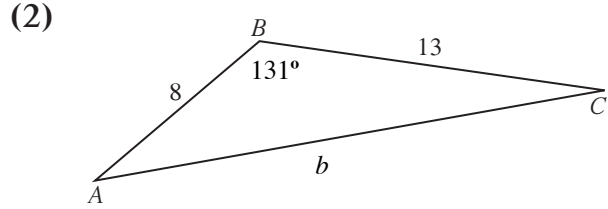
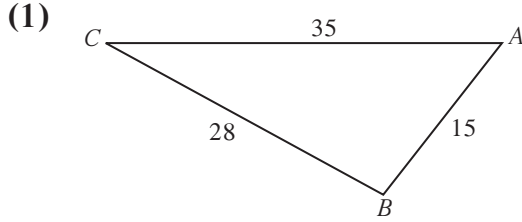
- (a) $AC \approx 13.8$ km, $BC \approx 10.9$ km (b) $AC \approx 32.6$ km, $BC \approx 36.6$ km
(c) $AC \approx 28.9$ km, $BC \approx 10.9$ km (d) $AC \approx 28.9$ km, $BC \approx 36.6$ km

قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:



في التمارين (3-8)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82^\circ$

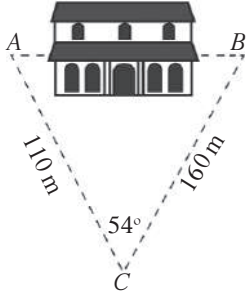
(5) $a = 2, b = 5, c = 4$

(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$

(7) $m(\widehat{A}) = 63^\circ, a = 18.6, b = 11.1$

(8) $m(\widehat{A}) = 71^\circ, a = 9.3, b = 8.5$

(9) في الهندسة: متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39° . أوجد طول قطره الأصغر.

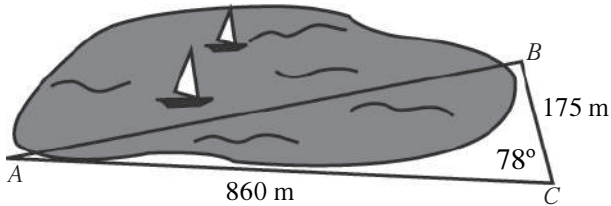


(10) قياس المسافة بطريقة غير مباشرة: أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A وB في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.

إذا كان $m(\widehat{C}) = 54^\circ$. فأوجد المسافة AB.

(11) حسابات مساحي الأراضي: أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة.

فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها 78° ، أوجد طول المسافة AB.



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC : $AB = 24$ cm , $AC = 19$ cm , $BC = 27$ cm فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $AB = 20$ cm , $BC = 44$ cm , فإنّ: $AC \approx 50.5$ cm (a) (b)

(3) في المثلث ABC : $b^2 + c^2 < 2bc \cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي 5 cm , 8 cm , 12 cm فإن قياس الزاوية الكبرى

في هذا المثلث يساوي حوالي 133.4° (a) (b)

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10$ cm , $BC = 20$ cm فإن طول \overline{AB} يساوي:

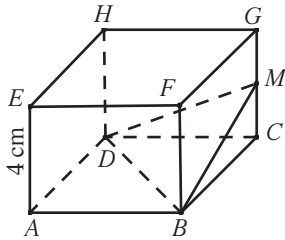
(a) $AB = 10\sqrt{7}$ cm (b) $AB = 10\sqrt{3}$ cm (c) $AB = 12.4$ cm (d) $AB = 29$ cm

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30$ cm , $AC = 40$ cm فإن طول \overline{BC} يساوي:

(a) $BC \approx 60.8$ cm (b) $BC \approx 36$ cm (c) $BC \approx 68$ cm (d) $BC \approx 21$ cm

(7) إذا كان $AB = 12$ cm , $AC = 17$ cm , $BC = 25$ cm فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالي:

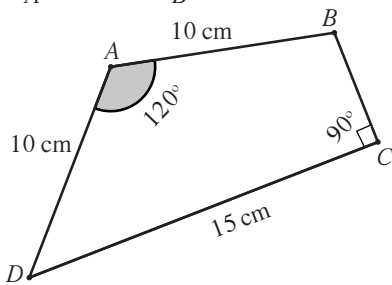
(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°



(8) مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 4 cm، النقطة M منتصف الضلع \overline{GC}

فإنّ: قياس الزاوية (\widehat{DMB}) يساوي:

(a) 78.46° (b) 86.82° (c) 11.54° (d) 3.2°

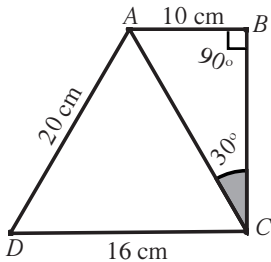


(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول \overline{BC} هو:

(a) 12.16 cm (b) 8.66 cm
(c) 11.5 cm (d) 13.7 cm

(10) في الشكل الرباعي $ABCD$ ، قياس الزاوية (\widehat{BAD}) يساوي تقريباً:

(a) 110° (b) 104°
(c) 107° (d) 120°



مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرين (1-2)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47^\circ$, $b = 32 \text{ cm}$, $c = 19 \text{ cm}$ (2) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$

في التمارين (3-6)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$ (4) $a = 23$, $b = 19$, $c = 12$
(5) $a = 19.3$, $b = 22.5$, $c = 31$ (6) $a = 18.2$, $b = 17.1$, $c = 12.3$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)
- (2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)
- (3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)
- (4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)
- (5) إذا كان a, b طولاً ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab \sin \theta$ (a) (b)
- (6) في المثلث ABC : $AC = 9 \text{ cm}$, $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, $b = 3 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

- (a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2
(c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

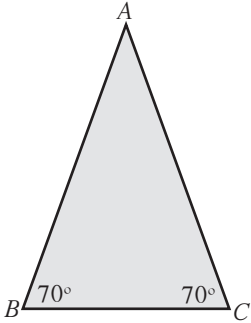
- (a) $6\sqrt{15} \text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5} \text{ cm}^2$
(c) $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

- (a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ units}^2$ (b) $a^2 \text{ units}^2$
(c) $\frac{1}{2} a^2 \text{ units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 8 cm^2 فإن طول \overline{AB} هو حوالى:

- (a) 5 cm (b) 8 cm
(c) 4 cm (d) 6 cm



اختبار الوحدة الثامنة

في التمارين (1-3)، ارسم بيان كل دالة.

(1) $y = -2 \cos x$

(2) $y = 2 \sin 2x$

(3) $y = \tan \frac{3}{2}x$

في التمارين (4-8)، حدّد دورة كل دالة وسعتها إذا كان ممكناً.

(4) $y = 1.5 \sin x$

(5) $y = 5 \cos \frac{x}{2}$

(6) $y = -4 \sin \frac{\pi}{3}x$

(7) $y = \tan 2.5x$

(8) $y = -\tan \frac{\pi}{6}x$

(9) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a \sin(bx)$ إذا كانت السعة 3، الدورة 4π

في التمرينين (10-11)، استخدم التحويلات لكي تصف كيف أن التمثيل البياني لمنحنيات الدوال التالية مرتبطاً بالتمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية $\sin x$ أو $\cos x$

(10) $y = -2 \sin \frac{\pi x}{4}$

(11) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (12-15)، أوجد مساحة كل مثلث.

(12) $m(\widehat{A}) = 20^\circ, b = 5 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$

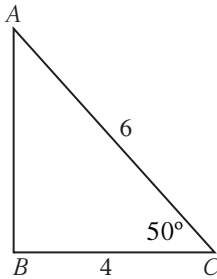
(13) $a = 4 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$

(14) $m(\widehat{A}) = 10^\circ, m(\widehat{C}) = 40^\circ, c = 3 \text{ cm}$

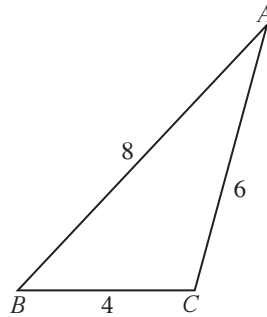
(15) $a = 4 \text{ cm}, b = 2 \text{ cm}, c = 3 \text{ cm}$

في التمارين (16-18)، أوجد العناصر المجهولة (قياس زاوية أو طول ضلع) في كل مثلث مما يلي:

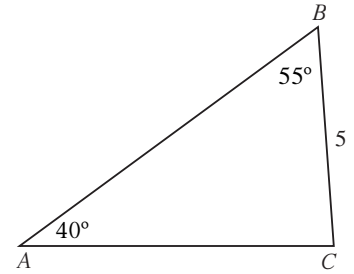
(16)



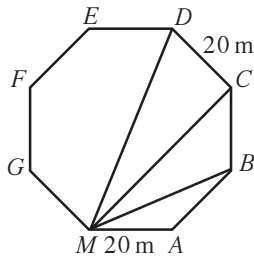
(17)



(18)



(19) الملاححة الجوية: أقلعت طائرتان في الوقت نفسه، إحداهما في اتجاه الشرق بسرعة 560 km/h والأخرى في اتجاه الشمال الشرقي بسرعة 600 km/h ، أوجد البعد بينهما بعد ساعتين من افتراقهما علماً أنهما تحلقان على الارتفاع نفسه.



(20) التصميم الزراعي: صمم مهندس زراعي حديقة على شكل مثنم

منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه 20 m

أوجد أطوال الأقطار MD, MC, MB

تمارين إثرائية

في التمرينين (1-2)، حدّد السعة، الدورة، الإزاحة الأفقية، الإزاحة الرأسية لكل من الدوال التالية:

(1) $y = 3 \cos(x + 3) - 2$

(2) $y = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 1$

في التمرينين (3-4)، صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f, g

(3) $f(x) = 2 \cos \pi x$, $g(x) = 2 \cos 2\pi x$

(4) $f(x) = 3 \sin \frac{2\pi x}{3}$, $g(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{3}$

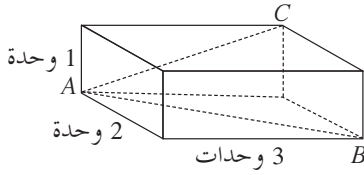
(5) إيجاد الارتفاع: وقف شخصان في جهتين مختلفتين من شجرة كبيرة بينهما مسافة 122 m، إذا كانت زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إلى كل منهما 15° ، 20° ، فأوجد ارتفاع الشجرة.

(6) تصميم العجلة الدوّارة: تتكوّن العجلة الدوّارة من 16 عربة متساوية البعد، تبلغ المسافة بين كرسيين متجاورين 4.72 m، أوجد نصف قطر العجلة.

(7) اكتب لتعلم: حدّد أي من الحالات التالية يمكن حلها باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام إذا علمت: $S.S.S$ ، $S.A.S$ ، $S.S.A$ ، $S.A.A$ ، $A.S.A$

(8) الربط بين حساب المثلثات والهندسة: زاوية داخلية لصدوق مستطيل الشكل، أطوال أضلاعه بالوحدات هي: 1، 2، 3

أوجد $m(\widehat{CAB})$



(9) في المثلث ABC أثبت أنّ: $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

(2) $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

(3) $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

(5) $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x}$

(6) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

(7) $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}$

(8) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(9) $\frac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

في التمارين (10-16)، بسّط المقادير إلى 1 أو -1

(10) $\frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$

(11) $\frac{1}{\csc^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x}$

(12) $\frac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

(13) $\cot(-x) \tan(-x)$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

(15) $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

(16) $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

في التمارين (17-19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

(18) $1 - 2 \sin x + (1 - \cos^2 x)$

(19) $\cos x - 2 \sin^2 x + 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = \frac{\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x) = \sec x$ (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = (\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$ هي: $E(x) = 2$ (a) (b)

(3) المقدار: $E(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$ هو: $E(x) = 1 + \sin x$ (a) (b)

(4) المقدار: $E(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x) = \sec^2 x$ (a) (b)

(5) المقدار: $E(x) = \csc x - \cos x \cot x$ هو: $E(x) = \cos x$ (a) (b)

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(1) (\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$$

$$(2) (\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$$

$$(3) (1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$$

$$(4) \tan x + \cot x = \sec x \csc x$$

$$(5) \tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

$$(6) \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2 \csc^2 x$$

$$(7) \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$(8) \cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$$

$$(9) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(10) \frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

$$(11) \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

$$(12) \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$(13) \sin^2 x \cos^3 x = (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x)$$

$$(14) \sin^3 x \cos^3 x = (\sin^3 x - \sin^5 x)(\cos x)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (a) (b)

$$(1) 3 \sin x = \sin(3x) \text{ تمثل متطابقة.}$$

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(4) الصورة المبسطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

في التمارين (5-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$

(b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$

(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

(d) $4 \sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$

(b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$

(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$

(b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$

(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$

(b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$

(d) $\tan x$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-7)، حل كلاً من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $2 \cos x = -1$

(4) $\sqrt{3} \tan a = 1$

(5) $2 \cos x \sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$

(7) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

في التمارين (8-10)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(8) $\sin 2x = 1$

(9) $2 \cos 3x = 1$

(10) $\tan 2x = 1$

في التمارين (11-12)، حلّ المعادلات التالية:

(11) $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$

(12) $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$. (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2 \sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$. (a) (b)

في التمارين (11-6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

- (a) الأول (b) الأول أو الثالث
(c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x - 2 \sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2 \cos 4x = 1$ حيث $x \in [0, \frac{\pi}{8})$ هو:

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

(10) حلول المعادلة: $3 \tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.
(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.
(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ، حيث k عدد صحيح.
(d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3 \tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هي:

- (a) $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\}$
(b) $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$
(c) $\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\}$
(d) $\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$

(2) $\tan 135^\circ$

(3) $\cos 75^\circ$

(4) إذا كان $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ ، $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

(a) أوجد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma + \beta)$

في التمارين (5-10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8) $\cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(a) (b)

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$

(4) $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

(1) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(a) (b)

(a) (b)

في التمارين (11-5)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan \frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

(b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$

(d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

(b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$

(b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$

(d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

(b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ تساوي:

(a) $\cos 112^\circ$

(b) $\cos 76^\circ$

(c) $\sin 112^\circ$

(d) $\sin 76^\circ$

(10) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos \frac{4\pi}{21}$

(b) $\sin \frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos \frac{10\pi}{21}$

(d) $\sin \frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan \frac{2\pi}{15}$

(b) $\tan \frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(-\frac{8\pi}{15}\right)$

(d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

- (1) $\sin 2x + \cos x$
- (2) $\sin 2x + \cos 2x$
- (3) $\cos 3x$
- (4) $\cos 4x$

في التمارين (5-7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

- (5) $2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$
- (6) $\sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$
- (7) $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (8-10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

- (8) $\sin 15^\circ$
- (9) $\tan 195^\circ$
- (10) $\cos 75^\circ$

(11) اختصر كلاً من التعابير التالية:

(a) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

(b) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(c) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

(12) إذا كانت $\sin x = -\frac{12}{13}$ ، $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ فأوجد $\sin \frac{x}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

(a) (b)

(2) $\sin 4x = -4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos^3 x \sin x$

(a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

(a) (b)

(4) $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

(a) (b)

(5) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

(a) (b)

في التمارين (6-8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1 + \cos x}{2}$

(b) $1 + \cos x$

(c) $1 + \cos 2x$

(d) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2} - 1$

(c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\cos \theta = \frac{-7}{25}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فإن $\cos \frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (1-3)، حوّل المقادير إلى \sin و \cos . اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

- (1) $\tan x + \cot x$
- (2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$
- (3) $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

في التمارين (4-8)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

- (4) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$
- (5) $\frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$
- (6) $\sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$
- (7) $\frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$
- (8) $\frac{1 + 2 \sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

في التمارين (9-13)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

- (9) $\tan \frac{5\pi}{12}$
- (10) $\sin \frac{-\pi}{12}$
- (11) $\cos(x - y) - \cos(x + y)$
- (12) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- (13) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

(14) (a) أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

- (1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
- (2) $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$ ، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$ ، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

تمارين إثرائية

في التمرينين (1-2)، حدّد ما إذا كانت الدالتان r , f متساويتين. إذا كانتا كذلك فاذكر سببًا مقنعًا. وإذا لم تكونا كذلك، فأوجد قيمة x التي تجعل $r(x) \neq f(x)$.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $r(x) = x$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $r(x) = \sin x$

في التمارين (3-5)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(3) $\frac{\tan x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$

(4) $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{1}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(5) $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}} - \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(6) لتكن: $\tan x = \frac{\sin y - \cos y}{\sin y + \cos y}$

(a) أثبت أن: $2 \cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) أثبت أن: $2 \sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

في التمارين (7-10)، حلّ كلّ من المعادلات التالية:

(7) $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

(8) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$

(9) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 = 0$

(10) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{6} = 0$

(11) أوجد حلول المعادلة التالية: $2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$

(12) حلّ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

(13) استخدم متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة لـ: $\tan \frac{11\pi}{12}$

(14) أوجد قيمة $\cos(x+y) \times \cos(x-y)$ بدلالة $\cos x$, $\cos y$

(15) (a) أثبت أن: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) مستندًا إلى النتيجة في (a)،

أثبت أن: $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(x + 30^\circ)$

(16) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4 \cos 2x$

(17) (a) أوجد قيمة $\cos(x+y+z)$ بدلالة: $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$

(b) استنتج قيمة $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ فقط (مساعدة: $x = y = z$).

(18) أوجد قيمة x إذا كان $\cos x = 1 + \sqrt{3} \sin x$

(19) حلّ المعادلة: $2 \cos x \tan x + \tan x - 2 \cos x - 1 = 0$

(20) حلّ المعادلة: $2 \cos^2 2x + \cos 2x = 1$

(21) لتكن: $y(x) = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ ، حيث $x \neq \frac{\pi}{4}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

أوجد قيمة $\tan x$ إذا كانت $y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(مساعدة: اكتب $y(x)$ بدلالة $\tan x$)

(22) (a) أثبت أن: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(b) اختصر: $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x}$

(23) أثبت صحة المتطابقة: $1 - \sin x + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$

(24) (a) أوجد قيمة $\cos 2x$ ، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, 0 < x < \pi$

(b) أوجد قيمة $\cos 4x$

(c) أوجد قيمة x

(25) أوجد قيمة $\sin 18^\circ, \sin 36^\circ, \cos 18^\circ$ ، إذا كان $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(26) ABC مثلث متطابق الضلعين فيه $AB = AC$ ، $m(\widehat{A}) = 2\alpha$ ، حيث $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

M منتصف \overline{BC} ، D الإسقاط العمودي للنقطة C على \overline{AB}

(a) أوجد BM باستخدام $\sin \alpha$ وبيّن أن $a = 2b \sin \alpha$

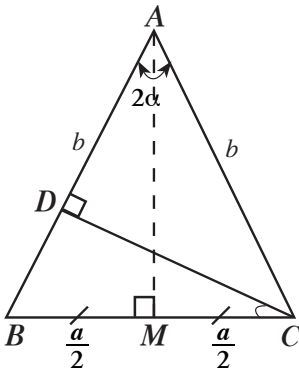
(b) استنتج $m(\widehat{DCB})$

(c) أوجد CD باستخدام $\cos \alpha$

(d) استنتج أن مساحة المثلث ABC هي $b^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

(e) أثبت أن مساحة ΔABC هي $\frac{1}{2} b^2 \sin(2\alpha)$

(f) أثبت أن: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

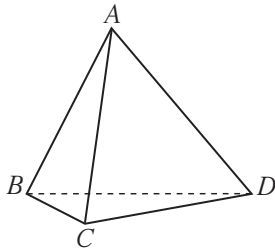
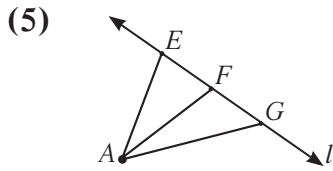
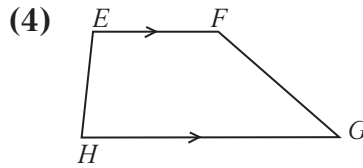
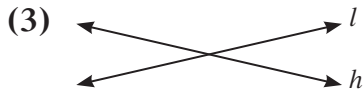
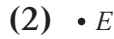


المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

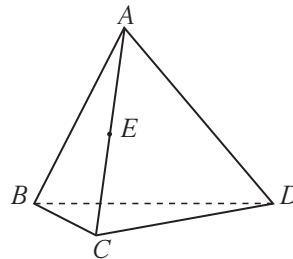
في التمارين (1-5)، هل الشكل يجب أن يكون موجوداً في مستوٍ واحد فقط؟



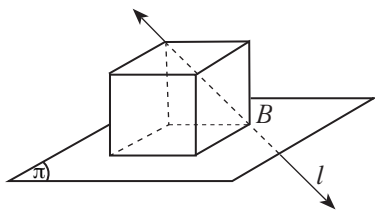
(6) هرم ثلاثي القاعدة $ABCD$.

سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.

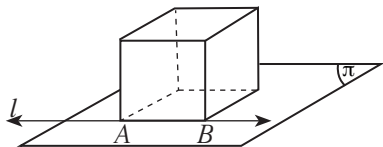
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC



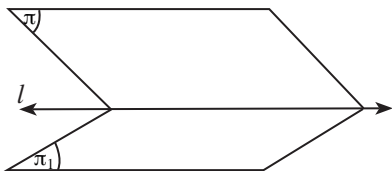
(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l .



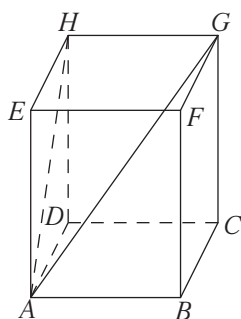
(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l .



(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1 .



(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:



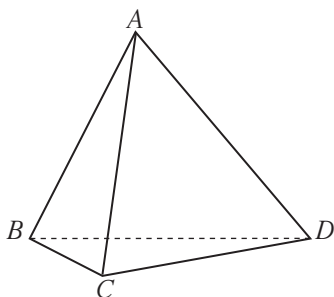
(a) $(AGH) \cap (ABC) = \dots$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $BFH, ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى \overline{EF} ,

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL

(10) ارسم \overline{AB} يقطع مستويًا π_1 في النقطة B ، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B .



(11) هرم ثلاثي القاعدة أوجد:

(a) تقاطع \overline{AB} مع المستوي BCD ؟

(b) تقاطع \overline{AB} مع المستوي ACD ؟

(c) تقاطع (ABC) مع المستوي BCD ؟

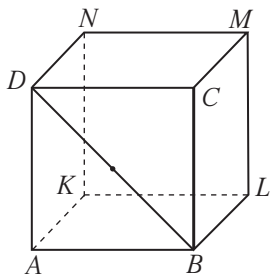
(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب أوجد إن أمكن العلاقة بين:

(a) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{ND}$ ؟

(b) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ ؟

(c) $\overrightarrow{ML}, \overrightarrow{BD}$ ؟

(d) \overrightarrow{ML} والمستوي $ABLK$ ؟



(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين $ABCD$, NBD

(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوي واحد.

(g) هل \overrightarrow{ML} , \overrightarrow{ND} يعينان مستويًا واحدًا؟

(h) أثبت أن المستويين ADK , CMN يتقاطعان.

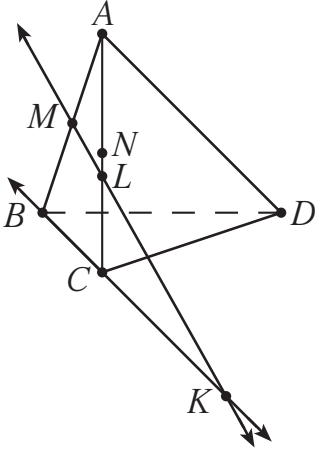
(13) هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف \overline{AB} , N منتصف \overline{AC} , $L \in \overline{AC}$, $L \neq N$

(a) أثبت أن: \overrightarrow{ML} يقع في المستوي ABC

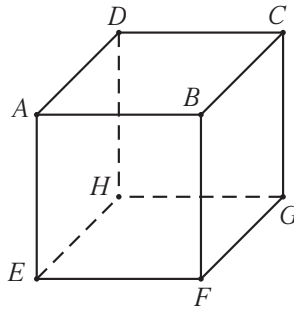
(b) أثبت أن: \overrightarrow{ML} , \overline{CB} يتقاطعان في النقطة K

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم \overrightarrow{ML} مع المستوي BCD ؟



المجموعة B تمارين موضوعية

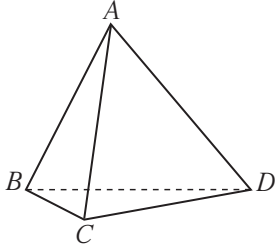
في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
مكعب $ABCDEFGH$.



- | | |
|-----|-----|
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |

- (1) المستقيمان AB , HG يعينان مستويًا.
- (2) النقاط B, D, H, F تعين مستويًا.
- (3) النقاط A, B, G, C تعين مستويًا.
- (4) المستقيمان GC , EF يعينان مستويًا.
- (5) المستقيمان BC , AB يعينان مستويًا.

في التمرين (6-7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

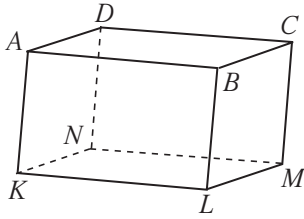
- (a) مستويًا واحدًا
(b) مستويين مختلفين
(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة
(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

- (a) خمسة مستويات مختلفة
(b) ستة مستويات مختلفة
(c) سبعة مستويات مختلفة
(d) ثمانية مستويات مختلفة

المستقيمت والمستويات المتوازية في الفضاء Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

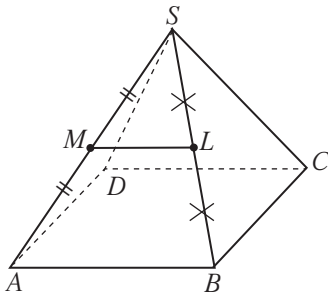
(a) أثبت أن: $\vec{AK} \parallel \vec{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: \vec{AD} يوازي المستوي MKN

(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π ؟ وضح ذلك بالرسم.

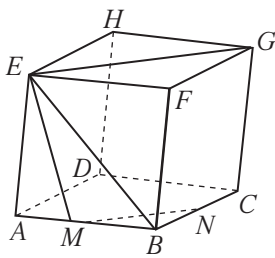
(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π



(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف SA ، L منتصف SB

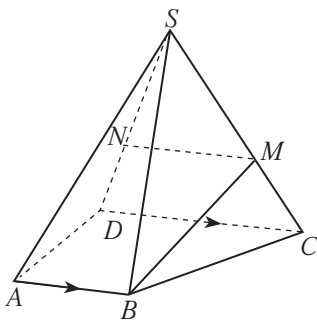
أثبت أن: $\vec{ML} \parallel (ABCD)$



(4) $ABCDEFGH$ مكعب.

المستوي GEM يقطع \vec{BC} في النقطة N ، $M \in \vec{AB}$

أثبت أن: $\vec{GE} \parallel \vec{MN}$



(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$

المستوي ABM يقطع \vec{SD} في N ، $M \in \vec{SC}$

(a) أثبت أن: \vec{AB} يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\vec{MN} \parallel \vec{CD}$

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لـ \overline{AC} والمار بالنقطة I يقطع \overline{BC} في J
 المستقيم الموازي لـ \overline{BD} والمار بالنقطة J يقطع \overline{CD} في K
 المستقيم الموازي لـ \overline{AC} والمار بالنقطة K يقطع \overline{AD} في H
 (a) ضع رسماً مناسباً.

(b) أثبت أن: $\overline{IH} \parallel \overline{BD}$

(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في \overline{MN} حيث:

$$\overline{AB} \subset \pi_1, \overline{AB} \parallel \pi_2$$

$$\overline{CD} \subset \pi_2, \overline{CD} \parallel \pi_1$$

أثبت أن: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

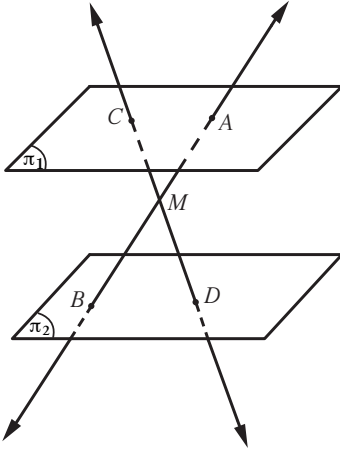
(8) $ABCD, ABEF$ متوازي أضلاع غير مستويين معاً ويتقاطعان في \overline{AB}

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

(9) في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

$$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$$

$$\text{أثبت أن: } \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$$



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

(a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما.

(a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن \vec{l} يوازي مستقيمًا وحيدًا في π

(a) (b)

(4) إذا كان: $\vec{m} \parallel \pi, \vec{l} \parallel \pi$ فإن $\vec{l} \parallel \vec{m}$

(a) (b)

(5) إذا توازي مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما

هو مستقيم يوازي كلياً من هذين المستقيمين.

في التمارين (6-8)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازي مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

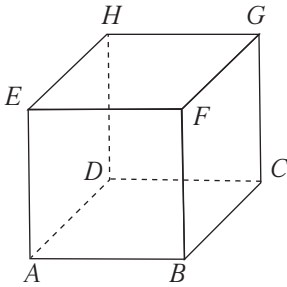
(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(7) إذا كان $\vec{l} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$ فإن $\vec{m} \subset \pi_2$:

(a) $\vec{l} \parallel \vec{m}$ (b) $\vec{l} \perp \vec{m}$

(c) متخالفان \vec{l}, \vec{m} (d) $\vec{l} \cap \vec{m} = \phi$



(8) في المكعب $ABCDEFGH$ ، \vec{BD} ، \vec{EG} هما:

(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستو واحد

(a) متوازيان

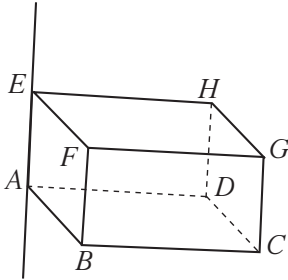
(c) متخالفان

تعامد مستقيم مع مستوي

Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a) متى يكون المستقيم عمودياً على المستوي؟
(b) ارسم مستقيماً عمودياً على مستوي.



(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) سمّ المستقيمت المتعامدة مع \vec{AE}

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع \vec{AE}

(c) أثبت أن \vec{AD} عمودي على المستوي CGH

(3) هرم ثلاثي القاعدة $ABCD$.

$$AD = AB, CD = CB$$

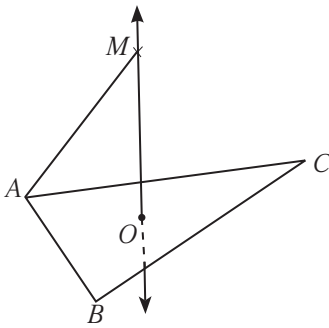
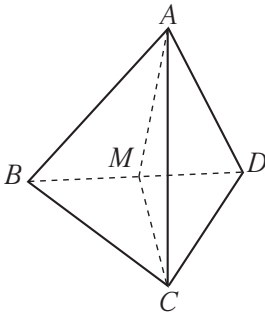
النقطة M منتصف \vec{DB}

(a) أثبت أن: $\vec{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\vec{BD} \perp \vec{AC}$

(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O ، \vec{MO} متعامد مع (ABC)

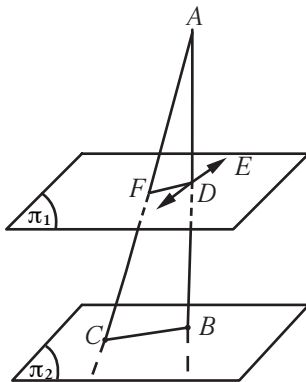
أثبت أن: $\vec{CB} \perp \vec{AM}$

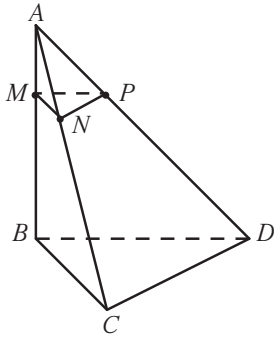


(5) في الشكل المقابل، \vec{AB} عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\vec{AD} \perp \vec{DE}$ ، $\vec{DE} \subset \pi_1$

فإذا كانت D منتصف \vec{AB} ، F منتصف \vec{AC}

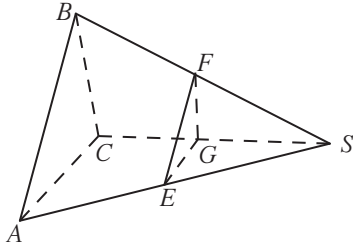
أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$





(6) في الشكل المقابل، هرم ثلاثي القاعدة حيث $\vec{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:
 $AD = 3AP$ ، $AC = 3AN$ ، $AB = 3AM$
 أثبت أن \vec{AB} عمودي على (MNP)

(7) في الشكل المقابل، $(ABC) \parallel (EFG)$ ، S نقطة خارج (ABC) ، بحيث $\vec{SC} \perp \vec{AC}$

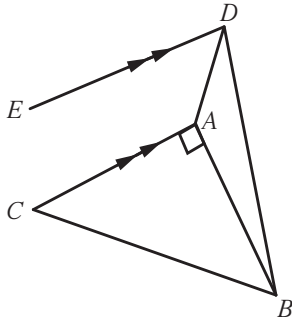


فإذا كان: $SB = 10 \text{ cm}$ ، $SC = 8 \text{ cm}$ ، $BC = 6 \text{ cm}$

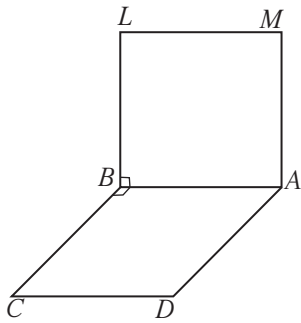
أثبت أن: $\vec{SC} \perp \vec{FE}$

(8) ليكن \vec{CD} ، \vec{EF} عموديان على المستوي π ويقطعانه في D ، F على الترتيب. فإذا كان \vec{CE} يوازي π . أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

(9) مثلث ABC ، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: \vec{DA} عمودياً على كل من \vec{AB} ، \vec{AC} ، فإذا كانت M منتصف \vec{AB} ، N منتصف \vec{DB} ، أثبت أن: $\vec{MN} \perp (ABC)$



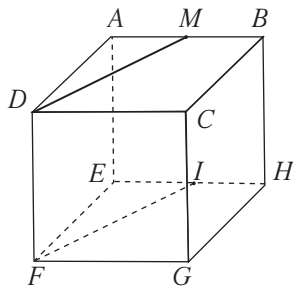
(10) في الشكل المقابل، مثلث قائم الزاوية في A ، رسم \vec{AD} عمودي على مستوي المثلث ABC ، ورسم $\vec{ED} \parallel \vec{CA}$ ، أثبت أن: $\vec{ED} \perp \vec{AB}$



(11) $ABLM$ ، $ABCD$ مربعان ليسا في مستوي واحد، لهما ضلع مشترك \vec{AB} ، أثبت أن: $\vec{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
 أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعب، النقطة M منتصف \vec{AB} ، I منتصف \vec{EH} .



- (1) $\vec{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)
 (2) $\vec{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

- (a) (b)
(a) (b)
(a) (b)
(a) (b)

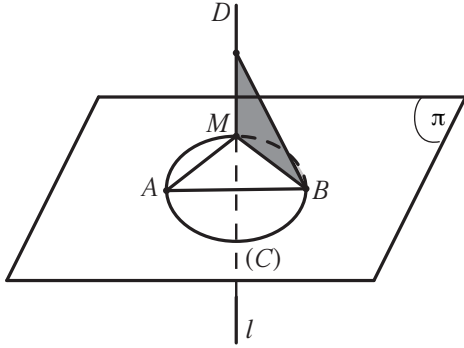
(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\vec{AB} \perp \vec{CD}$

(4) إذا كان $\vec{l} \perp \vec{m}$, $\vec{m} \subset \pi$ فإن $\vec{l} \subset \pi$

(5) إذا كان المستقيمان l, m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{l} \perp \vec{n}$

(6) إذا كان المستقيمان l, m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{l} \perp \vec{n}$ متخالفان.

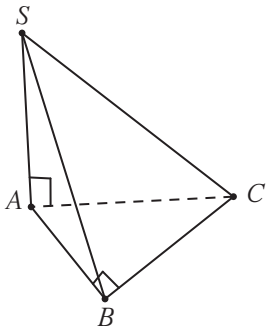
في التمارين (8-11)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.



(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\vec{l} \perp (AMB)$, \vec{AB} قطر في الدائرة (C) فإن:

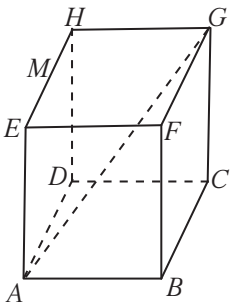
- (a) $\vec{AB} \perp \vec{BD}$ (b) $\vec{l} \perp (BMD)$
(c) $\vec{AM} \perp (BMD)$ (d) $\vec{AB} \perp \vec{BM}$



(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$, $\vec{SA} \perp (ABC)$ فإن:

- (a) المثلث SAB قائم في \widehat{B}
(b) $\vec{CB} \perp (SAB)$
(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.
(d) المثلث SCB قائم في \widehat{C}

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره \vec{AG} يساوي:

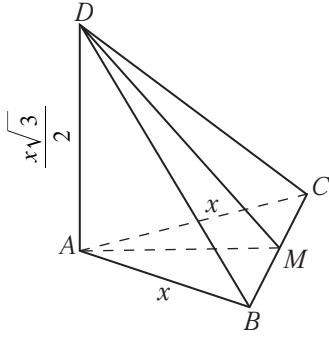


- (a) $\sqrt{3}$ cm (b) $3\sqrt{3}$ cm
(c) 9 cm (d) 18 cm

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x ABC

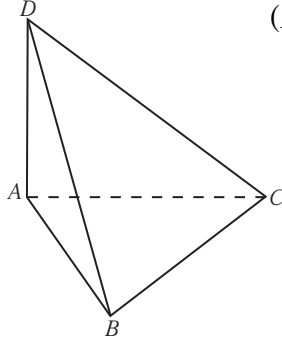
\overline{AD} متعامد مع المستوي ABC ، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ،

M منتصف \overline{BC}

(a) أثبت أن \overline{CB} متعامد مع المستوي AMD

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$

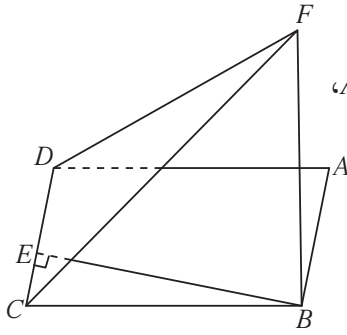
(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$



(2) مثلث متطابق الأضلاع.

\overline{AD} متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overline{DA}, DAC)$



(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، \overline{FB} عمودي على المستوي $ABCD$ ،

$\overline{BE} \perp \overline{CD}$ فإذا كان $FB = BE$ ،

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين $(ABCD)$ ، (FCD)

(4) هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC ،

طول ضلعه 10 cm ، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90^\circ$ ، $MA = 5\text{ cm}$ ، D منتصف \overline{BC}

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

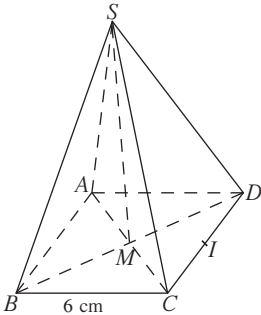
(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (ABC) ، (MBC)

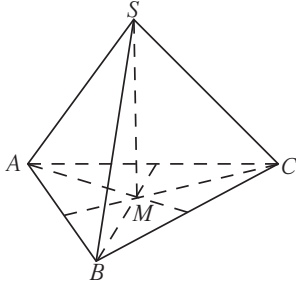
(5) هرم $SABCD$ مربع القاعدة طول ضلعها 6 cm ومركزها M

بحيث إن $\overline{SM} \perp (ABCD)$ ، I منتصف \overline{CD}

(a) أثبت أن: (MIS) هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overline{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(\widehat{MIS})$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\text{ cm}$

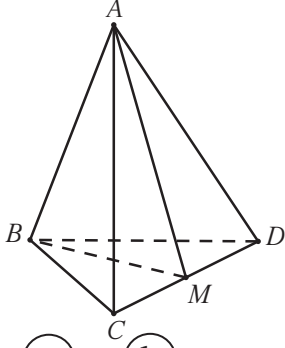




(6) هرم $SABC$ قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M
 بحيث إن $\overrightarrow{SM} \perp (ABC)$
 أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overrightarrow{SM}, SMC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.
 أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل.



إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف \overline{CD}
 فإن:

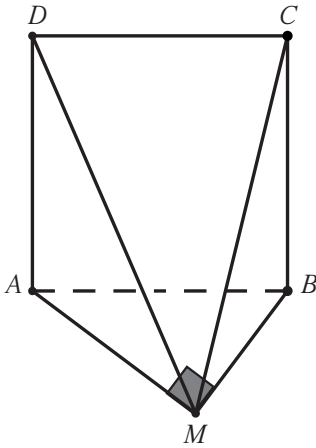
- (a) (b)
 (a) (b)

(1) \overline{CD} عمودي على \overline{AB}

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ADC, \overrightarrow{DC}, BDC)$ هي \widehat{AMD}

أسئلة التمرينين (3-4)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M ، \overrightarrow{AD} متعامد مع المستوي AMB
 إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعاً.



- (a) (b)
 (a) (b)

(3) \overline{BM} متعامد مع (MAD)

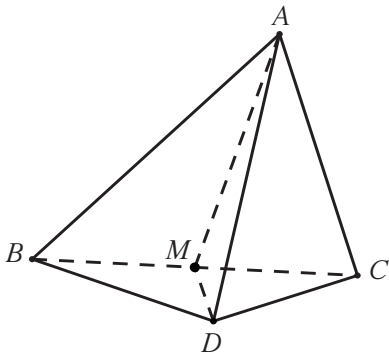
(4) \overline{CB} متعامد مع (AMB)

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (5-7)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف \overline{BC}

ABC ، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك \overline{BC} حيث $BC = x$
 وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.



(5) الزاوية الزوجية (BAC , \vec{BC} , BCD) هي:

- (a) \widehat{AMD} (b) \widehat{BMC} (c) \widehat{AMB} (d) \widehat{BAM}

(6) إذا كان: $m(\widehat{AMD}) = 60^\circ$ فقيمة AD بدلالة x هي:

- (a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ، فإن: $m(\widehat{AMD})$ يساوي:

- (a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30°

أسئلة التمرين (8-9) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

$$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ, OB = 2x, OA = x$$

\vec{OC} متعامد مع المستوى OAB

(8) طول \overline{AB} يساوي:

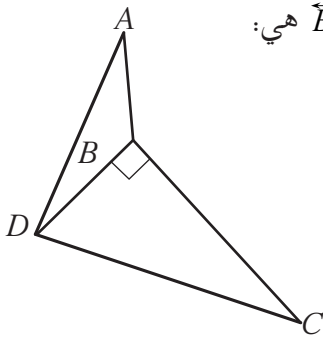
- (a) x (b) $x\sqrt{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية (AOC , \vec{OC} , BOC) هو:

- (a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B ،

فإذا كان \overline{AB} عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية \vec{BD} هي:

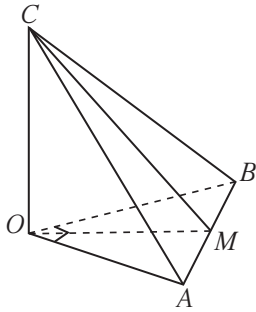


- (a) \widehat{DBC} (b) \widehat{ABC}
(c) \widehat{ABD} (d) \widehat{ADC}

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1) OAB مثلث قائم في O ، $OA = OB = 1$

\vec{OC} متعامد مع المستوي OAB ، $OC = 1$

M منتصف \overline{AB}

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

(2) ABC مثلث قائم في A ، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

$D \in l$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن \overline{AB} متعامد مع (ACD)

(b) استنتج أن \overline{AB} ، \overline{CD} متعامدان وأن المثلث ABD قائم في A

(c) أثبت أن \overline{CD} متعامد مع (ADB)

(d) استنتج أن (BDA) ، (CDB) متعامدان.

(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a :

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

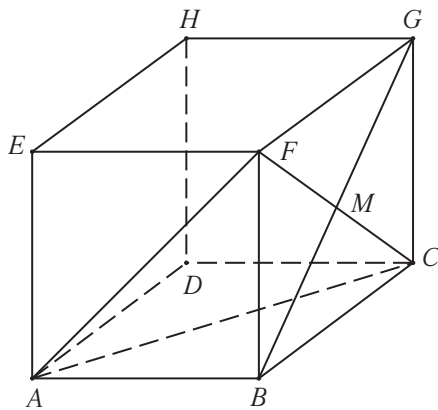
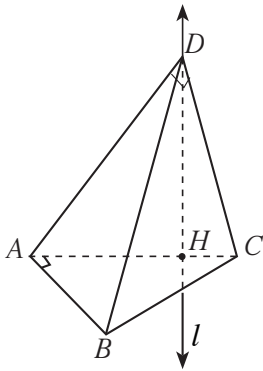
(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

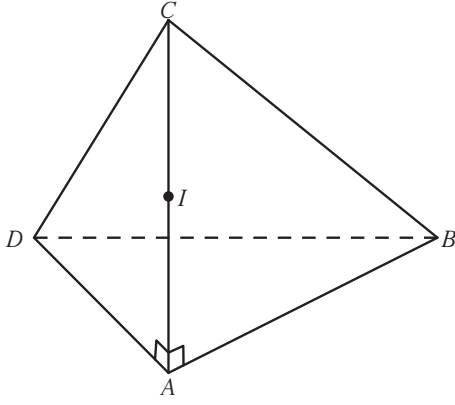
(c) M نقطة تقاطع \overline{FC} ، \overline{BG}

أثبت أن: $\overline{AM} \perp \overline{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overline{FC}$

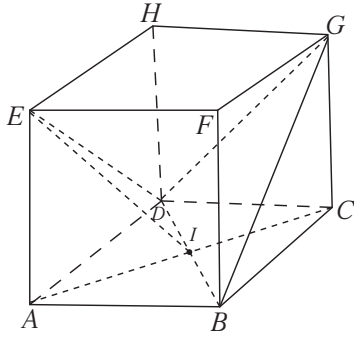




(4) هرم ثلاثي القاعدة فيه:

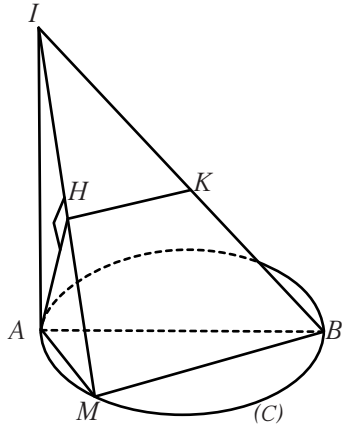
\overline{AC} منتصف \overline{AB} ، $\overline{CA} \perp (ABD)$

أثبت أن المستوي العمودي من I على \overline{AC} يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف \overline{DC} ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف \overline{BC}



(5) مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 5 cm

(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.
(b) نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$ ،
أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$



(6) في الشكل المقابل:

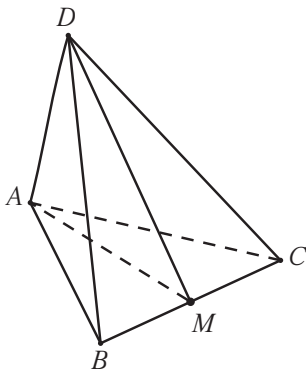
(C) دائرة قطرها \overline{AB} ، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B
 \overline{IA} عمودي على مستوى الدائرة.
(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$
(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$ ، K نقطة على \overline{IB}
أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (1-5)، على الشكل المقابل.

إذا كان \overline{AD} متعامد مع (ABC) ، $AB = AC$ ، M منتصف \overline{BC} فإن:



(1) $(ABC) \perp (DAC)$

(a)

(b)

(2) $(DBC) \perp (DAC)$

(a)

(b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$

(a)

(b)

(4) $(AMD) \perp (DBC)$

(a)

(b)

(5) $DC = DB$

(a)

(b)

(a) (b)

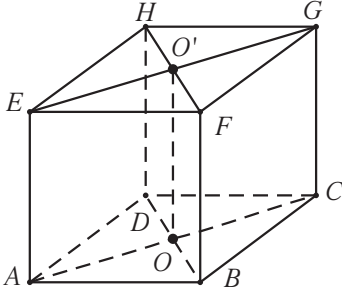
(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان.

في التمارين (7-12)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7-8)، على الشكل المقابل حيث إن:

$ABCDEF GH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$ ، O' مركز المستطيل $EFGH$



(7) $(EFGH)$ ، $(FGCB)$ هما:

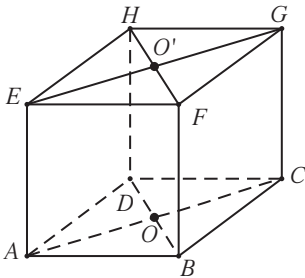
(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًا مما سبق

(8) $(ABCD)$ ، $(DBFH)$ هما:

(a) متوازيان (b) منطبقان (c) متعامدان (d) ليس أيًا مما سبق

أسئلة التمرينين (9-10)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEF GH$ مكعب طول ضلعه a .

O مركز المربع $ABCD$ ، O' مركز المربع $EFGH$



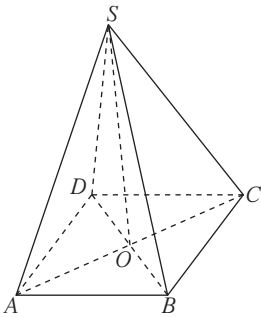
(9) $(DHFB)$ ، $(EACG)$ هما:

(a) منطبقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًا مما سبق

(10) (OAB) ، (HGE) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًا مما سبق



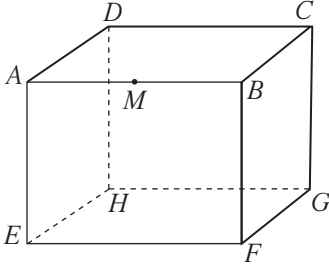
(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O ، $\vec{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$
(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

(12) إذا كان: $\vec{T} \perp \pi_1$ ، $\vec{T} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \vec{T}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

اختبار الوحدة العاشرة



(1) مكعب $ABCDEFGH$ ، M منتصف \overline{AB}

(a) هل \overline{AB} والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

(b) هل \overline{AB} ، \overline{GH} يعينان مستويًا واحدًا؟

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

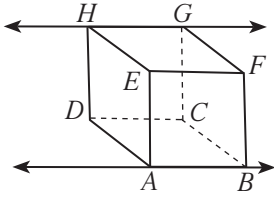
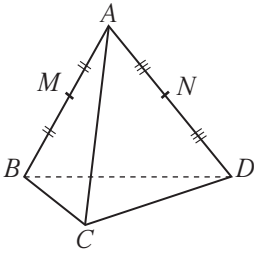
(2) هرم $ABCD$ ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف \overline{AB} والنقطة N منتصف \overline{AD}

أكمل:

(a) $\overline{NM} \dots\dots \overline{BD}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) = \dots\dots$

(c) $(CNB) \cap (ABD) = \dots\dots$



(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

(c) أثبت أن: \overline{HF} موازٍ للمستوي $ABCD$

(4) $ABCDHEFG$ شبه مكعب.

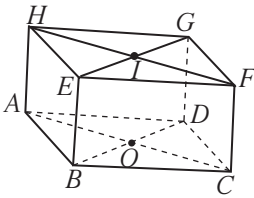
النقطة O مركز المربع $ABCD$ ،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: E, G, D تقع في المستوي $EGDB$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) = \dots\dots$

(c) أثبت أن: $\overline{AH} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{OI}$



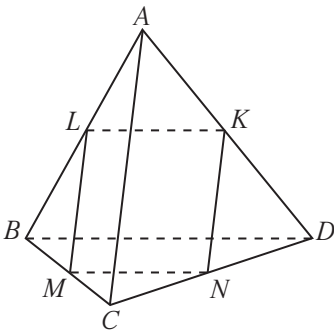
(5) هرم $ABCD$ ثلاثي القاعدة؛ L منتصف \overline{AB} ، M منتصف \overline{CB} ،

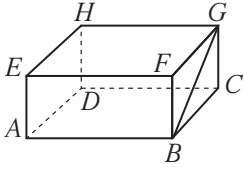
N منتصف \overline{CD} ، K منتصف \overline{AD}

(a) أثبت أن: $\overline{NK} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

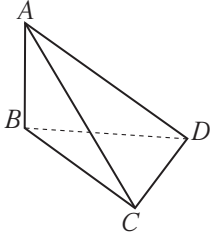
(c) أثبت أن: \overline{NL} يتقاطع مع \overline{KM}





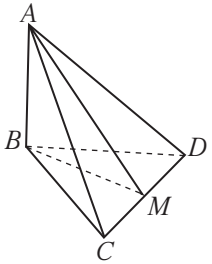
(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

أثبت أن: \overrightarrow{GH} متعامد مع \overrightarrow{GB}



(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$ ، \overrightarrow{AB} متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$

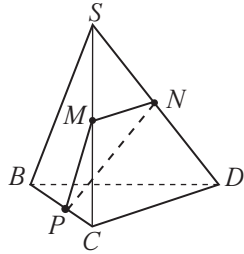


(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ؛

M منتصف \overline{CD}

(a) أثبت أن: $\overrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) استنتج أن: $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AM}$

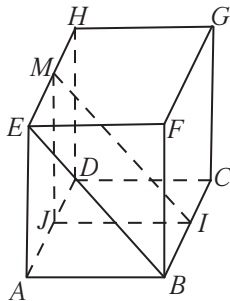


(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD ، M منتصف \overline{SC} ، N منتصف \overline{SD} ، P نقطة على \overline{BC}

(a) أثبت أن \overline{MN} مواز للمستوي BCD

(b) إذا كان (PMN) يقطع \overline{BD} في النقطة L

أثبت أن: $\overline{PL} \parallel \overline{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف \overline{BC} ،

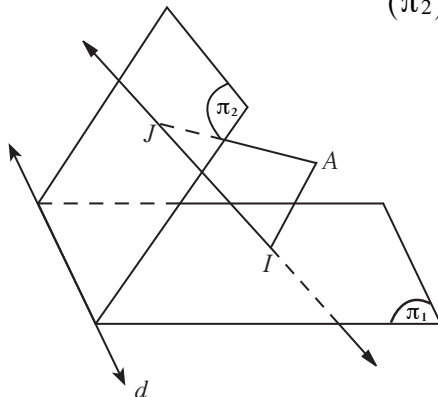
J منتصف \overline{AD} ، M منتصف \overline{EH}

(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM) ، (ABE) متوازيان

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$



(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في \vec{d} ، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\overline{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overline{AJ} \perp (\pi_2)$

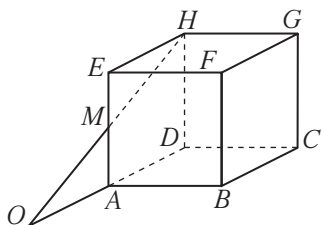
(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

(b) أثبت أن $\vec{d} \perp (AIJ)$

(c) أثبت أن: $\vec{d} \perp \overline{IJ}$

تمارين إثرائية



(1) مكعب $ABCDEFGH$ ، M منتصف AE

\overline{HM} يقطع المستوي $ABCD$ في O

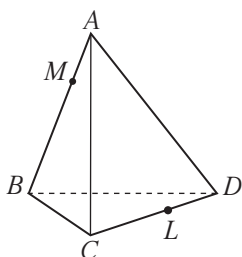
أثبت أن النقاط A, D, O تقع على استقامة واحدة.

(2) هرم $ABCD$ ثلاثي القاعدة.

النقطة M تنتمي إلى \overline{AB} وتنتمي النقطة L إلى \overline{CD}

(a) أثبت أن L تنتمي إلى كل من (ABL) ، (CDM)

(b) أكمل: $(ABL) \cap (CDM) = \dots\dots$



(3) $ABCDXYHM$ شبه مكعب،

O منتصف \overline{XM} ، F منتصف \overline{XY}

\overline{DM} ، \overline{AO} يتقاطعان في G

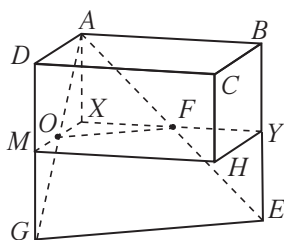
\overline{BY} ، \overline{AF} يتقاطعان في E

(a) أثبت أن النقطة O هي منتصف \overline{AG}

(b) أثبت أن النقطة F هي منتصف \overline{AE}

(c) أثبت أن: $\overline{OF} \parallel \overline{EG}$

(d) أثبت أن: \overline{EG} يوازي المستوي $XYHM$

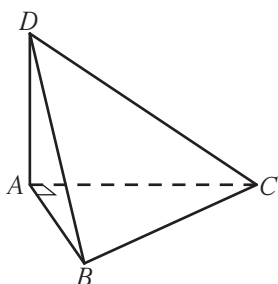


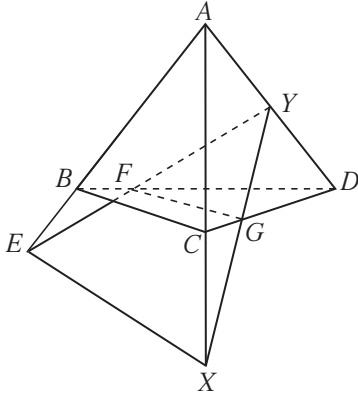
(4) هرم $DABC$ فيه المثلثات ABC ، ACD ، قائمة الزاوية في A

(a) أثبت أن: $\overline{AD} \perp (ABC)$

(b) استنتج أن: $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

(c) أثبت أن: $\overline{AB} \perp (ADC)$





(5) هرم ثلاثي القاعدة. $ABCD$

$$\vec{FG} \parallel \vec{BC}, Y \in \overline{AD}$$

\overline{FY} يقطع \overline{AB} في E , \overline{GY} يقطع \overline{AC} في X

(a) أثبت أن: $(ABC) \cap (FYG) = \overline{XE}$

(b) أثبت أن: $\overline{XE} \parallel \overline{FG}$

(6) مثلث متطابق الأضلاع. ABC

\overline{AD} متعامد مع المستوي ABC

F منتصف \overline{AB}

(a) أثبت أن: \overline{CF} متعامد مع المستوي DAB

(b) أثبت أن: \overline{CF} متعامد مع \overline{BD}

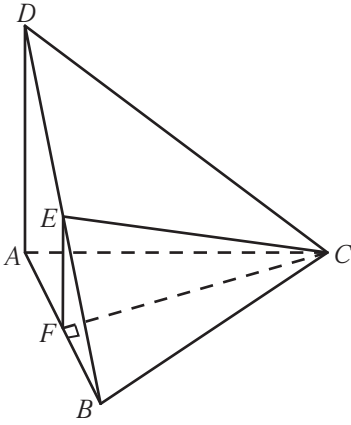
(c) أثبت أن: (ABC) متعامد مع (ABD)

(d) ليكن \overline{FE} متعامداً مع \overline{BD}

أثبت أن: \overline{CE} متعامد مع \overline{BD}

(e) إذا كان: $FE = 4 \text{ cm}, CE = 6 \text{ cm}$

فأوجد قياس الزاوية الزوجية $(DBA, \overline{DB}, DBC)$



مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر A . أوجد:
(a) عدد الأعداد الممكنة تكوينها.

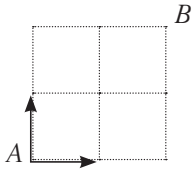
(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكنة تكوينها.

(c) عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكنة تكوينها.

(2) لتكن $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر B . أوجد:
(a) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكنة تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام التي تقبل القسمة على 5 الممكنة تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأصغر من 5000 الممكنة تكوينها.



(3) على ورقة المربعات المقابلة، ما عدد الخطوات التي تسمح بالانتقال من A إلى B بالاتجاه فقط إلى اليمين أو إلى الأعلى؟

(4) السيارات: تقترح بعض الشركات على زبائنها تبديل مواقع إطارات السيارة كل مسافة معينة.

(a) بكم طريقة مختلفة يمكن تبديل مواقع الإطارات الأربعة؟

(b) إذا استخدم الإطار الاحتياطي، فكم يصبح عدد طرائق تبديل الإطارات؟

(5) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) ${}_8P_1$

(b) ${}_3P_2$

(c) ${}_8P_3$

(d) ${}_9P_6$

(6) طلب 15 طالباً موعداً للتحدث مع مدير المدرسة، كلاً بمفرده. بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير استقبال الطلاب؟

(7) لقضاء سهرة يمكن لعائلة اختيار مطعم من بين 4 مطاعم وصالة سينما من بين 3 صالات. فما عدد طرق اختيار لمطعم وصالة سينما؟

(8) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3$, $n \geq 4$

(b) ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$

(c) $\frac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \frac{n^2}{12}$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن لثلاثة طلاب الجلوس في صف واحد يحوي 8 مقاعد؟

(10) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) 6C_2 (b) ${}^7C_3 \times {}^9C_5$ (c) 4C_4 (d) ${}^6C_2 + {}^6C_3$

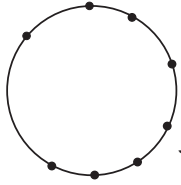
(11) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر؟

(12) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 أرقام من المجموعة:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ؟

(13) فاز 16 طالبًا بعضوية فريق كرة القدم في المدرسة. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار 11 لاعبًا منهم علمًا أنه يوجد بين الطلاب حارس مرمى واحد؟

(14) نواف طالب جامعي، يريد اختيار رفيقين أو 3 للسكن معه في المبنى الجامعي. بكم طريقة ممكنة يمكنه الاختيار إذا كان عدد رفاقه 25؟



(15) الهندسة: في الشكل المقابل، هناك 8 نقاط على الدائرة.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 3 من هذه النقاط المختلفة؟

(b) ما عدد المضلعات الخماسية المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 5 من هذه النقاط؟

(c) فسّر، لماذا يجب أن تتساوى الإجابتان في (a)، (b).

(16) في الصفّ الحادي عشر «الشعبة A» 24 طالبًا وفي «الشعبة B» 22 طالبًا. أراد معلم الأنشطة الفنية اختيار 7 طلاب للتدرب على عمل مسرحي. ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن تتضمن مجموعة الطلاب المختارة على الأقل طالبين من الشعبة A؟

(17) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nC_3 + {}_nC_2 = 3n(n-1)$ (b) ${}_nC_4 = {}_nC_{n-2}$ (c) ${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2} {}_{2n}C_5$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- | | | |
|-----|-----|---|
| (a) | (b) | (1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800 |
| (a) | (b) | (2) قيمة المقدار $5! \times 4!$ هي 360 |
| (a) | (b) | (3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ |
| (a) | (b) | (4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 |
| (a) | (b) | (5) $(n-r)! = n! - r!$ |

في التمارين (15-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

- (a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{1}{120}$ (c) 120 (d) 1

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

- (a) 75 600 (b) 7 560 (c) 2.5 (d) 210

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

- (a) 18 (b) 5.184 (c) 10 (d) 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعباً إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهماً؟

- (a) 95 040 (b) 475 200 (c) 392 (d) 11 404 800

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

- (a) 210 (b) 35 (c) 840 (d) 24

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

- (a) 20 160 (b) 2 520 (c) 40 320 (d) 5 040

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن

اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

- (a) 1 (b) 19 (c) 9 (d) 6

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاوز محمد وأحمد؟

- (a) 5! (b) 4! (c) $2! \times 4!$ (d) $2! \times 5!$

(14) إذا كان: ${}_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

- (a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: ${}_6C_r = 15$ هي:

- (a) {2} (b) {4} (c) {2, 4} (d) {3}

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a + b)^3$

(b) $(a + b)^4$

(c) $(x + y)^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x + y)^4$

(b) $(x - y)^4$

(c) $(x - 2)^5$

(3) فك كلاً مما يلي:

(a) $(3x - y)^5$

(b) $(x^2 + y)^4$

(c) $(3x + 5y)^3$

في التمارين (4-8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x + 3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x + 3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2 + x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x - 2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2 - 2y)^{11}$

(9) تحليل الخطأ: زعم أحد الطلاب بأن: ${}^7C_5 x^2 y^4$ هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على $x^2 y^3$ في مفكوك $(3x - 7y)^5$

(11) في مفكوك $(5 - 3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على $a^3 b^3$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$
- (2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$ ، فإنّ قيمة n هي 5
- (3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7
- (4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$
- (5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

- (a) (b)
(a) (b)
(a) (b)
(a) (b)
(a) (b)

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

- (a) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ (b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(c) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ (d) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

- (a) $-21a^5b^2$ (b) $-7a^6b$
(c) $7a^6b$ (d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معاملته 2 160 هو:

- (a) الحدّ الثاني (b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع (d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

- (a) 5 170 (b) 3 312
(c) 4 320 (d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

- (a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

- (a) T_3 (b) T_6 (c) T_5 (d) T_8

الاحتمال

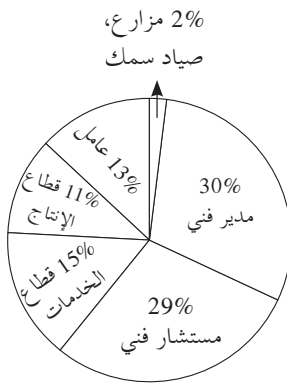
Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، رميت حجري نرد. بين ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

- (1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4
- (2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

(3) يبين التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:



- (a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.
- (b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.
- (c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًا.
- (d) اختيار شخص ليس عاملاً وليس من قطاع الإنتاج.

| المسكن | الجبل | شاطئ البحر | المجموع |
|---------------------|-------|------------|---------|
| استئجار شقة في مبنى | 14 | 6 | 20 |
| فندق | 16 | 12 | 28 |
| منزل مستقل | 8 | 18 | 26 |
| المجموع | 38 | 36 | 74 |

(4) يبين الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

- (a) الكرتان زرقاوان.
- (b) كرة زرقاء وكرة حمراء.
- (c) الكرتان من اللون نفسه.

(6) إذا كان الحدثان t, r غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

| | $P(t)$ | $P(r)$ | $P(t \cap r)$ | $P(t \cup r)$ |
|-----|----------------|----------------|---------------|----------------|
| (a) | $\frac{7}{11}$ | $\frac{3}{11}$ | | $\frac{9}{11}$ |
| (b) | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ |
| (c) | | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$ |
| (d) | $\frac{2}{x}$ | $\frac{3}{2x}$ | $\frac{1}{x}$ | |

(7) إذا كان الحدثان t, r متنافيين. أوجد $P(t \cup r)$.

(a) $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$

(b) $P(t) = 12\%$, $P(r) = 27\%$

(8) إذا كان الحدثان m, n مستقلان. أوجد $P(m \cap n)$.

(a) $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$

(b) $P(m) = 0.6$; $P(n) = 0.9$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائياً. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي.

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

(11) في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. اختير 10 أشخاص عشوائياً من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

(12) يستخدم حوالي 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالباً. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائياً، اختيار الدواليب عشوائياً هما حدثان مستقلان.

(a) (b)

(2) الحدثان m, n مستقلان، $P(m) = \frac{12}{17}$ ، $P(n) = \frac{3}{8}$ ، إذاً $P(m \cap n) = \frac{9}{17}$

(a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$

(a) (b)

(4) في اختبار صح - خطأ، أجبنا عن 5 أسئلة عشوائياً. احتمال أن تكون 3

(a) (b)

من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m, n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$ ، $P(n) = \frac{9}{10}$ ، إذاً $P(m \cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$

(d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان r, t متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$ ، $P(r) = \frac{1}{3}$ ، إذاً $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$

(b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$

(d) 0

(7) الحدثان r, t متنافيان $P(t) = \frac{1}{7}$ ، $P(r) = 60\%$ ، إذاً $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) 28%

(b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$

(d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائياً كرتان معاً من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$

(b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$

(d) $\frac{15}{28}$

(10) يتوزع طلاب مدرستين A ، B على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

| الصف | العاشر | الحادي عشر | الثاني عشر |
|------|--------|------------|------------|
| A | 37% | 35% | 28% |
| B | 38% | 34% | 28% |

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

- (a) 20.16% (b) 100%
(c) 0% (d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لا عيب فيها هو تقريبًا:

- (a) 0.033 (b) 5.9×10^{-4}
(c) 4×10^{-4} (d) 2.955

اختبار الوحدة الحادية عشرة

- (1) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 ممثلين من مجموعة مؤلفة من 11 ممثلاً لتحضير عمل مسرحي؟
- (2) بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 15 طالباً على مجموعات كل منها من 3 طلاب؟
- (3) أنت تبحث عن منزل. هناك 5 منازل للإيجار، بكم طريقة مختلفة يمكن زيارة هذه المنازل؟
- (4) أوجد مفكوك: $(1 - 2t)^4$
- (5) أوجد قيمة التعبير: $2({}_5C_4) - {}_3C_2$
- في التمرينين (6-7)، رميت حجري نرد. في كل حالة، حدّد ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا، ثم أوجد $P(A \cup B)$.
- (6) A : «مجموع العددين الظاهرين = 12»؛ B : «كل من العددين هو عدد فردي».
- (7) A : «العددان متساويان»؛ B : «مجموعهما من مضاعفات العدد 3».
- (8) احتمال النجاح = 0.2، أوجد احتمال النجاح في 4 محاولات من بين 10
- (9) احتمال الفوز = 0.6، أوجد احتمال الفوز 3 مرات في 8 محاولات.
- (10) في مدرستك اشترى 30% من الطلاب شعار المدرسة، اخترت 5 طلاب عشوائياً. فما احتمال أن يكون:
- (a) اثنان منهم قد اشترى شعار المدرسة؟
- (b) على الأقل اثنان قد اشترى شعار المدرسة؟
- (11) يوجد في واجهة أحد المحلات التجارية 6 مصابيح كهربائية. عند الاستخدام العادي، إمكانية أن يبقى كل مصباح يعمل لمدة سنتين هي 95%
- (a) فما احتمال أن تبقى المصابيح الستة تعمل لمدة سنتين؟
- (b) فما احتمال أن تبقى 5 مصابيح تعمل خلال سنتين؟
- (12) تقول إحدى الشركات أن 99% من علب رقائق الذرة التي تباعها وزنها مطابق لما هو مدوّن على العبوة.
- (a) في صندوق من 10 علب. ما احتمال ألا يطابق وزن عبوة واحدة فقط ما هو مدوّن عليها؟
- (b) ما احتمال أن تكون أوزان 3 علب من هذا الصندوق غير مطابقة لما هو مدوّن عليها؟

تمارين إثرائية

- (1) يقول صاحب أحد محلات بيع الخضار والفاكهة أن 90% من ثمار الأناناس التي يبيعها تصبح ناضجة خلال 4 أيام. أوجد احتمال كل مما يلي لصندوق يحتوي على 12 ثمرة أناناس.
- (a) كل الثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.
- (b) على الأقل 10 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.
- (c) ليس أكثر من 9 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.
- (2) باستخدام الأحرف A, B, C نريد كتابة كلمات من 10 أحرف.
- (a) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها؟
- (b) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها:
- (i) تبدأ بـ A ؟
- (ii) تنتهي بـ ABC ؟
- (iii) تتضمن الحرف A في الخانة السادسة؟
- (iiii) الأحرف الثلاثة الأولى A, B, C دون الأخذ بعين الاعتبار الترتيب؟
- (c) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها وتتضمن:
- (i) على الأقل حرف A مرة واحدة؟
- (ii) بالتحديد 4 مرات الحرف B .
- (iii) على الأكثر مرة واحدة C ؟
- (3) تتكوّن الشيفرة السرية لفتح الخزانة من حرف يليه عدد من 3 أرقام.
- (a) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت». فما عدد الشيفرات الممكنة؟
- (b) الحرف هو ك لكن لا يوجد رقم متكرر.
- (c) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت» وعدد الشيفرة هو عدد زوجي.
- (d) الحرف هو ت، يتضمن العدد على الأقل أحد الأرقام 7, 8, 9
- (4) رمز المنزل مكوّن من 4 أرقام لا صفر فيها ولا تكرار. اختار يوسف رمزًا عشوائيًا. فما احتمال أن يكون صحيحًا؟
- (5) حل في n : ${}_nC_3 + {}_nC_2 = 5n(n-1)$
- (6) تتألف الموسوعة العلمية من 20 جزءًا. وقد وضعت عشوائيًا على رف المكتبة. فما احتمال أن يكون الجزءان 1, 2 قرب بعضهما بعضًا.

- (7) يوجد في واجهة أحد المحال التجارية صف من المصابيح الكهربائية. تعطى إمكانية أن تبقى بعض هذه المصابيح تعمل لأكثر من سنتين بالتعبير: $C_2(0.15)^2 \times (0.85)^3$
- (a) ما عدد مصابيح واجهة المحل؟
- (b) ما عدد المصابيح التي يتوقع أن تبقى تعمل لأكثر من سنتين؟
- (c) ما احتمال أن تبقى جميع المصابيح تعمل لأكثر من سنتين؟
- (8) في الكيس الأول 6 كرات سوداء اللون و4 بيضاء اللون. في الكيس الثاني، 8 كرات سوداء اللون و12 كرة بيضاء اللون. نختار كيساً عشوائياً ثم نختار أيضاً عشوائياً كرة من الكيس.
- فما احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون؟
- (9) رميت قطعة نقود معدنية 6 مرات. احتمال الحصول على صورة 3 مرات وكتابة 3 مرات يساوي 0.3125، هل قطعة النقود هذه معدلة؟
- (10) لنفرض أنه اختير عشوائياً عدد من 10 إلى 100 ضمناً.
- (a) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 5؟
- (b) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 4؟
- (c) هل الحدثان متنافيان؟ اشرح.
- (d) ما احتمال أن يكون العدد من مضاعفات العدد 5 والعدد 4؟
- (11) في اختبار «الاختبار من متعدد» هناك 4 إجابات لكل سؤال.
- (a) اختار طالب إجابة عشوائياً، فما احتمال أن تكون صحيحة؟
- (b) اختار طالب ثلاثة أسئلة من الاختبار وأجاب عنها عشوائياً. فما احتمال أن تكون الإجابات الثلاث صحيحة؟

